

- النهايات والاستمرارية
- الاشتقاق
- الدوال الأصلية
- الدوال الأسية
- الدوال اللوغاريتمية
- المتتاليات العددية
- الحساب التكاملي

سلسلة مدرسية

Hard\_equation

# الرياضيات

## 3AS

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

شعبة العلوم التجريبية

- مراجعة الدروس
- تمارين بحلول مفصلة
- مواضيع نموذجية لامتحان
- الباكلوريا مع حلولها

منشورات الشهاب



# تمارين و مسائل محلولة في الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي  
شعبة العلوم التجريبية

الطبعة الثانية منقحة

رابح بناني  
مفتش التربية و التكوين

وحسن أوديع  
مفتش التربية و التكوين

العربي داود  
مفتش التربية و التعليم الأساسي

## الجزء 1

- النهايات و الاستمرارية
- الاشتقاق
- الدوال الأصلية
- الدوال الأسية
- الدوال اللوغاريتمية
- المتتاليات العددية
- الحساب التكاملي

منشورات الشهاب

© منشورات الشهاب، 2007

الحجم : 18,5 x 27 - عدد الصفحات : 160

ردمك : 9 - 588 - 63 - 9961

الإيداع القانوني : 2007 - 2419

منشورات الشهاب : 10، نهج إبراهيم عرفاء، باب الواد، الجزائر 16009

site internet : [www.chihab.com](http://www.chihab.com) - E-mail : [chihab@chihab.com](mailto:chihab@chihab.com)

أنجز طبعه على مطابع عمار قرفي - باتنة



# مقدمة

هذا الكتاب في الرياضيات موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي الذين يدرسون بصفة خاصة في شعبة العلوم التجريبية، كما يمكن لتلاميذ الشعب العلمية و التكنولوجيا الأخرى استغلاله.

إن مضامينه مطابقة للمنهاج الرسمي الذي شرع في تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و المنجز في إطار إصلاح المنظومة التربوية، و هو يغطي في جزئه الأول مضامين التعلم المتعلقة بميدان التحليل. يعتبر هذا الكتاب وسيلة تعليمية يسمح استعمالها بتمديد العمل المنجز في القسم و بتدعيم المكتسبات و التدريب على العمل الفردي.

يندرج هذا الإصدار في تصور خاص و مميز للتعلم، فهو يهدف إلى إعطاء الفرصة للتلميذ لممارسة و تعلم البرهنة و تحرير حلول بصفة سليمة، و هذا ما يحضره لمختلف عمليات التقويم خلال السنة الدراسية و خاصة الاستعداد الجيد لامتحان شهادة البكالوريا. يتركب هذا الجزء من 7 أبواب، يشمل كل باب الأجزاء التالية :

- معارف متمثلة في تعاريف ومبرهنات ونتائج وخواص وملاحظات، مصاغة بصفة دقيقة وموجزة.
- طرائق مطبقة في وضعيات وجيهة، مرفقة بحلول محررة بتعبير رياضي سليم، يدركه التلميذ و يستعمله في وضعيات مماثلة.
- تمارين بحلول نموذجية توظف معارف و طرائق مدروسة، تبين فعاليتها.
- تعتبر هذه التمارين نماذج يمكن التمرن عليها كثيرا من التحكم في المفاهيم و الطرائق، و تذليل الصعوبات التي تتضمنها.
- تمارين و مسائل مقترحة للحل، يتدرب عليها التلميذ. و تسمح مواجهة هذه الوضعيات بتشخيص الصعوبات العنيدة و معالجتها في الوقت المناسب.
- أدرجت في الجزء الأخير من هذا الكتاب حلول موجزة للتمارين و المسائل المقترحة في نهاية كل باب، يطلع عليها التلميذ بعد إنجاز محاولاته قصد مقارنة حله و التحقق من صحته ثم تعديل و تصحيح أخطائه. إن هذا العمل يسمح له بتحسين مردوده و التحكم في الكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها في المنهاج.

## فهرس الجزء الأول

الصفحة	المحتويات	المجال
5 8 14 17 135	معارف ..... طرائق ..... تمارين و حلول نموذجية ..... تمارين و مسائل مقترحة ..... حلول التمارين المقترحة .....	1 - النهايات و الإستمرارية
19 23 34 37 138	معارف ..... طرائق ..... تمارين و حلول نموذجية ..... تمارين و مسائل مقترحة ..... حلول التمارين المقترحة .....	2 - الاشتقاق
40 42 46 48 141	معارف ..... طرائق ..... تمارين و حلول نموذجية ..... تمارين و مسائل مقترحة ..... حلول التمارين المقترحة .....	3 - الدوال الأصلية
50 52 59 61 142	معارف ..... طرائق ..... تمارين و حلول نموذجية ..... تمارين و مسائل مقترحة ..... حلول التمارين المقترحة .....	4 - الدوال الأسية
64 69 80 83 145	معارف ..... طرائق ..... تمارين و حلول نموذجية ..... تمارين و مسائل مقترحة ..... حلول التمارين المقترحة .....	5 - الدوال اللوغاريتمية
86 92 100 102 150	معارف ..... طرائق ..... تمارين و حلول نموذجية ..... تمارين و مسائل مقترحة ..... حلول التمارين المقترحة .....	6 - المتتاليات
105 110 120 131 156	معارف ..... طرائق ..... تمارين و حلول نموذجية ..... تمارين و مسائل مقترحة ..... حلول التمارين المقترحة .....	7 - الحساب التكاملي

**محتويات الجزء الثاني :** 1 - التحليل التوفيقى . 2 - الإحتمالات . 3 - الأعداد المركبة .

4 - التشابهات المستوية المباشرة . 5 - الهندسة في الفضاء .



### 1 - النهايات

• نهايات مجموع أو جداء أو حاصل قسمة دالتين

$f$  و  $g$  دالتان عدديتان،  $\alpha$  عدد حقيقي أو  $-\infty$  أو  $+\infty$ .  $l$  و  $l'$  عددان حقيقيان  
الجدول التالية تقدم المبرهنات المتعلقة بنهايات الدوال المقررة في السنة الثالثة من التعليم الثانوي.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ هي	و $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ هي	فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x))$ هي
$l$	$l'$	$l + l'$
$l$	$+\infty$	$+\infty$
$l$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha}  f(x) $ هي	و $\lim_{x \rightarrow \alpha}  g(x) $ هي	فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha}  f(x) \times g(x) $ هي
$l$	$l'$	$ll'$
$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$0$	$+\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha}  f(x) $ هي	و $\lim_{x \rightarrow \alpha}  g(x) $ هي	فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left  \frac{g(x)}{f(x)} \right $ هي
$l$	$l' \neq 0$ حيث $l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
$l \neq 0$	$0$	$+\infty$
$0$	$0$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.
$l$	$+\infty$	$0$
$+\infty$	$l'$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

• ملاحظة : الحالات التي لا تسمح فيها المبرهنات بالنص على نتيجة تسمى حالات عدم التعيين؛ عددها

أربعة وهي من الأشكال التالية :  $+\infty - \infty$  ؛  $0 \times \infty$  ؛  $\frac{0}{0}$  ؛  $\frac{\infty}{\infty}$

### • النهايات والحدود

1.  $f, g, h$  هي دوال معرفة في جوار  $+\infty$  حيث  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  :  $l$  عدد حقيقي.  
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

2.  $f$  و  $g$  دالتان عدديتان معرفتان في جوار  $+\infty$  حيث  $f(x) \geq g(x)$ .  
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

3.  $f$  و  $g$  دالتان عدديتان معرفتان في جوار  $+\infty$  حيث  $f(x) \leq g(x)$ .  
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

### • نهاية دالة كثير الحدود

$f$  دالة كثيرة الحدود معرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  حيث  $a_n \neq 0$  و  $n$  عدد طبيعي غير منعدم.

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$

### • نهاية دالة ناطقة

$f$  دالة ناطقة حيث :  $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0}$  :  $a_n \neq 0$  و  $b_p \neq 0$  :  $n \in \mathbb{N}^*$  و  $p \in \mathbb{N}^*$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \right)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \right)$

### • نهاية دالة مركبة

$f, g, h$  دوال عددية حيث  $h = g \circ f$  :  $a, b, l$  أعداد حقيقية أو  $+\infty$  أو  $-\infty$ .  
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  و  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$  فإن  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = l$ .

### • السلوك التقاربي

$f$  دالة عددية معرفة على مجال من الشكل  $]a; +\infty[$  أو  $]a; -\infty[$  حيث  $a$  عدد حقيقي معلوم و  $b$  عدد حقيقي.  $(\mathcal{E})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم.  
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (أو  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ) فإن المستقيم ذا المعادلة  $x = a$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{E})$ ، يوازي محور الترتيب.

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  (أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ) فإن المستقيم ذا المعادلة  $y = b$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{E})$ ، يوازي محور الفواصل.

إذا كان  $f(x) = mx + p + \varphi(x)$  حيث  $p, m$  عددان حقيقيان و  $m \neq 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$  (أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ ) فإن المستقيم ذا المعادلة  $y = mx + p$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{E})$ .

إذا كان  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$  و  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = p$  حيث  $p, m$  عددان حقيقيان و  $m \neq 0$ .



فإن المستقيم ذا المعادلة  $y = mx + p$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

. إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$  و  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = +\infty$  حيث  $m \neq 0$  فإن  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحنى المستقيم ذو المعادلة  $y = mx$ .

. إذا كان  $m = 0$  فإن  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحنى محور الفواصل.

. إذا كان  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  (أو  $-\infty$ ) فإن  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحنى محور الترتيب.

## II - الاستمرارية

- $f$  دالة معرفة على مجموعة  $D$ ،  $a$  عدد حقيقي غير منعدم من  $D$ .  $I$  مجال محتوى في  $D$ .
- $f$  مستمرة عند  $a$  يعني  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- $f$  مستمرة على  $I$  يعني  $f$  مستمرة عند كل عدد حقيقي  $a$  من  $I$ .

### • العمليات الجبرية

- $f$  و  $g$  دالتان معرفتان على مجال  $I$ ،  $a$  عدد حقيقي ينتمي إلى  $I$ .
- . إذا كانت  $f$  و  $g$  مستمرتين عند  $a$  فإن الدالتين  $f + g$  و  $f \times g$  مستمرتان عند  $a$ .
- . إذا كانت  $g$  مستمرة عند  $a$  و  $g(a) \neq 0$  فإن الدالة  $\frac{1}{g}$  مستمرة عند  $a$ .
- . إذا كانت  $f$  و  $g$  مستمرتين عند  $a$  و  $g(a) \neq 0$  فإن الدالة  $\frac{f}{g}$  مستمرة عند  $a$ .
- . إذا كانت  $f$  مستمرة عند  $a$  و  $g$  مستمرة عند  $f(a)$  فإن الدالة  $g \circ f$  مستمرة عند  $a$ .
- . الدوال كثيرة الحدود،  $\sin$ ،  $\cos$ ،  $x \mapsto |x|$  مستمرة على  $\mathbb{R}$ .
- . الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- . الدالة  $x \mapsto \sqrt{x}$  مستمرة على المجال  $[0; +\infty[$ .

### • مبرهنة القيم المتوسطة

- $f$  دالة معرفة على المجال  $[a; b]$ .
- . إذا كانت  $f$  مستمرة على المجال  $[a; b]$  فإن من أجل كل عدد حقيقي  $m$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي  $c$  في المجال  $[a; b]$  حيث  $f(c) = m$ .

### • التفسير الهندسي

- . المستقيم ذو المعادلة  $y = m$  يقطع المنحنى الممثل للدالة  $f$  في نقطة على الأقل، فاصلتها  $c$  تنتمي إلى المجال  $[a; b]$ .

- ملاحظة :** . إذا كانت  $f$  مستمرة ورتيبة تماما على المجال  $[a; b]$  فإن من أجل كل عدد حقيقي  $m$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$ ، يوجد عدد حقيقي  $c$  وحيد ينتمي إلى المجال  $[a; b]$  حيث  $f(c) = m$ .
- . إذا كانت  $f$  مستمرة ورتيبة تماما على المجال  $[a; b]$  حيث  $f(a) \cdot f(b) < 0$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا واحدا في المجال  $[a; b]$ .



1 حساب نهاية مجموع أو جداء أو حاصل قسمة دالتين

تمرين

احسب النهايات التالية :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}\right)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}\right)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$  .  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x)$

حل

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}\right)$

الدالة  $x \mapsto 1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}$  معرفة على المجموعة  $]0; +\infty[ \cup ]-\infty; 0]$  .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^2} = 0$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = 1$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}\right)$

الدالة  $x \mapsto \sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (لأن  $\sin x \approx x$  بجوار العدد 0)

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$

الدالة  $x \mapsto \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$  معرفة على المجموعة  $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$  .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x) = 3$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)(x+2) = 0$

من أجل كل عدد  $x$  قريب من 1 حيث  $x < 1$  :  $(x-1)(x+2) < 0$  .

و من أجل كل عدد  $x$  قريب من 1 حيث  $x > 1$  :  $(x-1)(x+2) > 0$  .

حسب المبرهنات المقدمة في الجداول السابقة :

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = +\infty$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x)$

الدالة  $x \mapsto x^3 + x$  معرفة على  $\mathbb{R}$  .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x) = +\infty$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x)$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x) = +\infty$

تمرين

أحسب النهايات التالية :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + x + 1)$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1}$  :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x})$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

حل

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + x + 1)$  الدالة  $x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x + 1) = +\infty$

المبرهنة المتعلقة بنهاية مجموع دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم،  $x^3 - x^2 + x + 1 = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + x + 1) = +\infty$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1}\right)$  الدالة  $x \mapsto \frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1}$  معرفة على  $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x + \sqrt{x}) = +\infty$

المبرهنة المتعلقة بنهاية حاصل قسمة دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  يختلف عن 1

$$\frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{x \left(4 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{4 + \frac{\sqrt{x}}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{4 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{x}}$$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 4$

إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1} = 4$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  الدالة  $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$

المبرهنة المتعلقة بنهاية حاصل قسمة دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

نعلم أن  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$

بوضع  $y = \frac{x}{2}$  يكون  $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$  و  $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin y}{y} \right)^2$

نعلم أن  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sin y}{y} \right) = 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = 1$

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x})$  الدالة  $x \mapsto \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x})$  معرفة على  $]0; +\infty[$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3\sqrt{x}) = +\infty$

المبرهنة المتعلقة بنهاية جداء دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما :  $\frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x}) = \frac{x^2}{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} = x + \frac{3}{\sqrt{x}}$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$  ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x}) = +\infty$

### 3 استعمال الحصر لحساب نهاية دالة

#### تمرين

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x)$$

#### حل

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x)$  الدالة  $x \mapsto (2x - \sin x)$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $-1 \leq \sin x \leq 1$

إذا كان  $x \geq 0$  فإن  $-1 \leq \sin x \leq 1$  و  $-1 \leq -\sin x \leq 1$

ينتج أن  $2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$

و  $2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x) = +\infty$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)$  الدالة  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

من أجل أن كل عدد حقيقي  $x$  :  $-1 \leq \sin x \leq 1$

إذا كان  $x > 0$  فإن  $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$  لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}}$  الدالة  $x \mapsto \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}}$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$ .

من أجل أن كل عدد موجب تماما  $x$  :  $-1 \leq \cos x \leq 1$  و بالتالي  $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$

بما أن  $\sqrt{x} > 0$  على المجال  $]0; +\infty[$  فإن  $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$

نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} = 0$



#### 4 حساب نهاية دالة مركبة

##### تمرين

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x + 3}$$

##### حل

- حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x + 3}$  الدالة  $x \mapsto \sqrt{2x + 3}$  معرفة على المجال  $[-\frac{3}{2}; +\infty[$  لتكن  $f$  الدالة  $x \mapsto 2x + 3$  المعرفة على  $[-\frac{3}{2}; +\infty[$  و  $g$  الدالة  $y \mapsto \sqrt{y}$  المعرفة على  $[0; +\infty[$  لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[-\frac{3}{2}; +\infty[$  :  $(g \circ f)(x) = \sqrt{2x + 3}$  بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3) = +\infty$  و  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x + 3} = +\infty$
- حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x}$

- الدالة  $x \mapsto \sqrt{x^2 - x}$  معرفة على المجموعة  $]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$  لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty$
- حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$  الدالة  $x \mapsto \frac{\sin 3x}{x}$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$

- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $\frac{\sin 3x}{x} = 3 \left( \frac{\sin 3x}{3x} \right)$  بوضع  $y = 3x$  نلاحظ أن  $y$  يؤول إلى 0 عندما  $x$  يؤول إلى 0. و نعلم أن  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$  وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$  أي  $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \left( \frac{\sin 3x}{3x} \right) = 3$

#### 5 البحث عن المستقيمات المقاربة للمنحنى الممثل لدالة

##### تمرين 1

- $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-2\}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x + 2}$  و  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم.
- 1. ادرس نهاية الدالة  $f$  عن اليمين و عن اليسار عند -2. ماذا تستنتج؟
- 2. عين ثلاثة أعداد حقيقية  $a, b, c$  و  $c$  حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-2\}$  :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$
- 3. استنتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.

1. الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{-2\}$  لدينا  $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0$  ،  $13 > 0$  ،  $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 + 1) = 13$

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$x+2$		$\emptyset$	
	$-$	$\emptyset$	$+$

إشارة  $x+2$  ملخصة في الجدول المقابل .

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$

و بالتالي فالمستقيم ذو المعادلة  $x = -2$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$ ، (يوازي محور الترتيب).

2. باستعمال القسمة الإقليدية لكثير الحدود  $3x^2 + 1$  على كثير الحدود  $x+2$  نجد حاصل القسمة هو  $3x-6$  و باقي القسمة هو  $13$  .

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-2\}$  :  $\frac{3x^2 + 1}{x+2} = 3x - 6 + \frac{13}{x+2}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-2\}$  :  $f(x) = 3x - 6 + \frac{13}{x+2}$

ينتج أن الأعداد  $a$  ،  $b$  و  $c$  المحققة للشرط هي  $a = 3$  ،  $b = -6$  و  $c = 13$  .

(يمكن الحصول على الأعداد  $a$  ،  $b$  و  $c$  باستعمال شرط تساوي كثيري حدود).

3. استنتاج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا.

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$

نلاحظ أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{13}{x+2} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{13}{x+2} = 0$

ينتج أن المستقيم ذا المعادلة  $y = 3x - 6$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

## تمرين 2

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$  و  $(\mathcal{E}_g)$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم. أثبت أن المنحنى  $(\mathcal{E}_g)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار  $+\infty$  .

## حل

مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $\mathbb{R}$  لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $x^2 + x + 1 > 0$  .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

• حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$  .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $\frac{g(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$

• حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x]$  . لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g(x) - x = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$



لدينا  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1}\right) = 2$  إذن  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - x] = \frac{1}{2}$  نستنتج أن المستقيم ذا المعادلة  $y = x + \frac{1}{2}$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  بجوار  $+\infty$ .

### تمرين 3

$h$  هي الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = \frac{x^2 - 5}{3x^2 + 1}$  و  $(\mathcal{C}_h)$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم. أثبت أن المنحنى  $(\mathcal{C}_h)$  يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل.

### حل

• الدالة  $h$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

• حساب نهايتي  $h$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5}{3x^2 + 1} = \frac{1}{3}$

إذن  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \frac{1}{3}$

و بالتالي المنحنى  $(\mathcal{C}_h)$  يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل معادلته  $y = \frac{1}{3}$ .

### 6 إثبات إستمرارية دالة عند عدد حقيقي

### تمرين

أدرس استمرارية كل دالة من الدوال  $f$ ،  $g$  و  $h$  التالية عند العدد  $x_0$ .

1.  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$  إذا كان  $x \neq 1$  و  $f(1) = 2$   $x_0 = 1$

2.  $g(x) = \frac{2x}{\sin x}$  إذا كان  $x \neq 0$  و  $g(0) = 0$   $x_0 = 0$

3.  $h(x) = \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$  إذا كان  $x \neq 3$  و  $h(3) = 4$   $x_0 = 3$

### حل

1. الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

• حساب  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}-1) = 0$

إذن لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة (أي توجد حالة عدم التعيين).

لدينا من أجل كل عدد  $x$  يختلف عن 1 :

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1$$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2$  نعلم أن  $f(1) = 2$  و بالتالي الدالة  $f$  مستمرة عند العدد 1.

2. الدالة  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

• حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$  لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم،  $\frac{2x}{\sin x} = \frac{2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

## تمارين و حلول نموذجية

نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} = 2$  أي  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$  .  
 لدينا  $g(0) = 0$  . إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$  . وبالتالي الدالة  $g$  ليست مستمرة عند العدد 0.  
 3. الدالة  $h$  معرفة على  $\mathbb{R}$  .

• حساب  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$  . لدينا  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{1+x} - 2 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$  .  
 لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 3 :

$$h(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x-3}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x} - 2)(\sqrt{1+x} + 2)}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{(1+x) - 4}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 2}$$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{1+x} + 2) = 4$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x-3} = 4$

وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 4$  . نعلم أن  $h(3) = 4$  .

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = h(3)$  فإن الدالة  $h$  مستمرة عند العدد 3.

### 7 استعمال مبرهنة القيم المتوسطة

#### تمرين

بين أن المعادلة  $x^3 + x + 1 = 0$  تقبل حلا واحدا في المجال المفتوح  $] -1 ; 0 ]$  .

#### حل

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = x^3 + x + 1$  .

$f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  إذن  $f$  معرفة على المجال المغلق  $[-1 ; 0]$  .

الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  ( لأن  $f$  هي مجموع دوال مرجعية معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$  ) .

إذن  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  . وبالتالي  $f$  مستمرة على المجال  $[-1 ; 0]$  .

لدينا  $f(-1) = -1$  و  $f(0) = 1$  إذن  $f(-1)$  و  $f(0)$  مختلفان في الإشارة.

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 3x^2 + 1$  .

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) > 0$  . وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  .

ينتج أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[-1 ; 0]$  .

لدينا  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[-1 ; 0]$  و  $f(-1)$  و  $f(0)$  من إشارتين مختلفتين

إذن المعادلة  $x^3 + x + 1 = 0$  تقبل حلا وحيدا في المجال المفتوح  $] -1 ; 0 ]$  .

## تمرين 1

- $f$  هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$  .  
 ليكن  $D$  مجموعة تعريف  $f$  و  $(\mathcal{E}_f)$  المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .  
 1. عين مجموعة التعريف  $D$  للدالة  $f$  و بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$$
  
 2. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .  
 3. بين أن المنحنى  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار  $+\infty$  .  
 4. أثبت أن المنحنى  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار  $-\infty$  . عين معادلة لهذا المستقيم .

## حل

1. تعيين مجموعة التعريف  $D$  للدالة  $f$  . الدالة  $f$  : معرفة إذا وفقط إذا كان  $x^2 - 3x + 1 \geq 0$  .  
 دراسة إشارة ثلاثي الحدود  $x^2 - 3x + 1$  .  
 $\Delta = 5$  ،  $\Delta > 0$  إذن ثلاثي الحدود  $x^2 - 3x + 1$  يقبل جذرين مختلفين في  $\mathbb{R}$  :  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$  و  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  .  
 باستعمال المبرهنات حول إشارة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية ،  
 ينتج أن  $x^2 - 3x + 1 \geq 0$  على  $D = ]-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$  .  
 • كتابة  $f(x)$  على الشكل  $\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$  . ثلاثي الحدود  $x^2 - 3x + 1$  يكتب على الشكل النموذجي  
 كما يلي :  $x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$  .  
 إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  :  

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$$
  
 2. حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .  
 لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$   
 إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = +\infty$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$   
 لدينا أيضا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$   
 ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = +\infty$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$   
 3. إثبات أن المنحنى  $(\mathcal{E})$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار  $+\infty$  .  
 لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$   
 • حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  .  
 لدينا من أجل كل  $x$  من  $D$  :  $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{x} = \frac{x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}$  :  

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
 إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$   
 1. النهايات - الاستمرارية .



## تمارين و حلول نموذجية

• حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 - 3x + 1} - x = \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x}, D \text{ من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ موجب من } D$$

$$= \frac{x(-3 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -\frac{3}{2} \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3 + \frac{1}{x}) = -3$$

ينتج أن المستقيم ذا المعادلة  $y = x - \frac{3}{2}$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $+\infty$ .

4. البحث عن مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  بجوار  $-\infty$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

• حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\frac{f(x)}{x} = \left( -\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) : D \text{ لدينا من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ سالب من } D$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$$

• حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$  من أجل كل عدد  $x$  سالب من  $D$  :  $f(x) + x = \sqrt{x^2 - 3x + 1} + x$

$$= \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x} = \frac{x(-3 + \frac{1}{x})}{x(-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1)} = \frac{-3 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \frac{3}{2} \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = -2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3 + \frac{1}{x}) = -3$$

و بالتالي المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته  $y = -x + \frac{3}{2}$ .

## تمرين 2

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sqrt{x-2}$  إذا كان  $x \geq 2$   
 و  $f(x) = x^2 + kx + 1$  إذا كان  $x < 2$ .  
 • عين العدد الحقيقي  $k$  حتى تكون الدالة  $f$  مستمرة عند العدد 2.

حل

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ . إذن الدالة  $f$  معرفة عند العدد 2 و  $f(2) = 0$ .

• حساب  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + kx + 1) = 5 + 2k, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2} = 0$$

$$\text{لدينا } f(2) = 5 + 2k \text{ يعني } 5 + 2k = 0 \text{ أي } k = -\frac{5}{2}$$

و بالتالي إذا كان  $k = -\frac{5}{2}$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$  (أي  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ )

ينتج أن إذا كان  $k = -\frac{5}{2}$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

و بالتالي الدالة  $f$  مستمرة عند العدد 2 إذا وفقط إذا كان  $k = -\frac{5}{2}$ .

## تمارين و مسائل

### المستقيمات المقاربة

في التمارين من (17) إلى (25).  
(E) هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم معطى.  
ادرس وجود المستقيمات المقاربة للمنحنى (E).

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1} \quad (18)$$

$$f(x) = x + 1 - \frac{3}{x^2 + 1} \quad (19)$$

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x-5} \quad (20)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x+1} \quad (21)$$

$$f(x) = x - \sqrt{x} \quad (22)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (23)$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \quad (24)$$

(25) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \cos x - x$$

1. ادرس نهاية كل من  $f(x) - x$  و  $\frac{f(x)}{x}$  عندما  $x$  يؤول إلى  $+\infty$ .

2. بين أن المنحنى (E) الممثل للدالة  $f$  لا يقبل مستقيما مقاربا في جوار  $+\infty$ .

(الحساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  يمكن إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $-1 - x \leq f(x) \leq 1 - x$ )

### الاستمرارية

في التمارين من (26) إلى (28).

$f$  دالة عددية و  $x_0$  عدد حقيقي، يطلب دراسة استمرارية الدالة  $f$  عند  $x_0$ .

$$x_0 = 1 : f(x) = x^2 - 2x \quad (26)$$

$$x_0 = 0 : f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (27)$$

$$x_0 \neq 0 : f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (28)$$

و  $f(0) = 1$

### العمليات على النهايات

في التمارين من (1) إلى (7)، يطلب حساب نهاية الدالة  $f$  عندما يؤول  $x$  إلى العدد  $a$ .

$$a = 1 + 00 : f(x) = x^2 + x + 1 \quad (1)$$

$$a = 0 : f(x) = x^3 + 3x \quad (2)$$

$$a = +\infty : f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4 \quad (3)$$

$$a = +\infty : f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} \quad (4)$$

$$a = +\infty : f(x) = x^3 \left( \cos \frac{1}{x} - 2 \right) \quad (5)$$

$$a = 1 \text{ أو } a = +\infty : f(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad (6)$$

$$a = -\infty$$

$$f(x) = \frac{E(x)}{x} \quad (7)$$

حيث  $E(x)$  هو الجزء الصحيح للعدد  $x$ .

$$a = +\infty$$

في التمارين التالية من (8) إلى (16)، يطلب

تعيين نهايات الدالة  $f$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$ .

$$a = -5 \text{ أو } a = 2 : f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} \quad (8)$$

$$a = -\infty \text{ أو } a = +\infty$$

$$a = -\frac{3}{2} \text{ أو } a = \frac{3}{2} : f(x) = \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} \quad (9)$$

$$a = -\infty \text{ أو } a = +\infty$$

$$a = +\infty : f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x \quad (10)$$

$$a = +\infty : f(x) = \frac{3x-5}{x+1} - \frac{\sin x}{x} \quad (11)$$

$$a = 1 : f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad (12)$$

$$a = 0 : f(x) = \frac{1}{x^4} \quad (13)$$

$$a = 0 : f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (14)$$

$$a = \frac{\pi}{3} : f(x) = \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}} \quad (15)$$

$$a = 0 : f(x) = \frac{\tan 3x}{\sin 5x} \quad (16)$$



## تمارين و مسائل

- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  -  
- حدد الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  و المستقيم المقارب المائل له.

37  $f$  دالة عددية معرفة كما يلي :

$$m \in \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + mx$$

عين نهايات الدالة  $f$  عندما  $x$  يؤول إلى  $-\infty$  أو  $+\infty$  (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ).

38  $h$  هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$h(x) = \sin(x^2 + x + 1)$$

أثبت أن الدالة  $h$  مستمرة عند كل عدد حقيقي  $x_0$

39 ادرس  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

40  $f$  هي دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 1}{(x+1)^2}$$

(1) بين أنه يوجد عدداً حقيقياً  $a$  و  $b$  حيث

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $-1$  :

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$$

(2) عين نهايات الدالة  $f$  عند حدود مجموعة تعريفها.

(3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$

الممثل للدالة  $f$  في معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

41 طول حرف مكعب هو  $x$  cm و أبعاد متوازي

المستطيلات هي  $1$  cm،  $3$  cm و  $(3x+4)$  cm

أوجد حصراً لقيمة  $x$  التي من أجلها يكون حجم

المكعب يساوي حجم متوازي المستطيلات.

بين أن  $3,5 < x < 3,6$ .

29  $f(x) = \frac{2x^2 + |x|}{x}$  :  $x_0 = 0$ .

خواص الدوال المستمرة على مجال

30 (1) ادرس تغيرات الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = 2x^3 + 5x - 4$$

(2) استنتج أن المعادلة  $2x^3 + 5x - 4 = 0$  تقبل

حلاً واحداً في المجال المفتوح  $]0; 1[$ .

31 نفس السؤال بالنسبة للمعادلة

$$x^6 + x^2 - 1 = 0$$

32 (1) ادرس تغيرات الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

(2) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً واحداً

في المجال  $] -1; 1[$ .

33  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي  $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

بين أن المعادلة  $f(x) = 2$  تقبل حلاً واحداً  $\alpha$

في المجال  $]2; 3[$ .

34 بين أن المعادلة  $\cos x = x$  تقبل حلاً

واحداً في  $\mathbb{R}$ .

35 بين أن المعادلة  $x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$  تقبل

حلاً واحداً في المجال المفتوح  $]1; 3[$ .

## مسائل

36  $f$  هي دالة عددية معرفة كما يلي

$$f(x) = \frac{5x^2 + x + 1}{x + 2}$$

(1) عين مجموعة تعريف  $D$  للدالة  $f$  و بين أنه

توجد ثلاثة أعداد حقيقية  $a$ ،  $b$  و  $c$  حيث من أجل

كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$ ،

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

(2) ليكن  $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$

في المستوى المنسوب إلى المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation

### • قابلية الاشتقاق عند عدد حقيقي

$f$  دالة معرفة على مجال مفتوح يشمل العدد الحقيقي  $x_0$ .  
 الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  إذا و فقط إذا كانت نهاية الدالة  
 عددا حقيقيا عندما  $h$  يؤول إلى 0.  
 هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $x_0$  و يرمز له  $f'(x_0)$ .  
 نكتب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$  أو  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

### • قابلية الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة لدالة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$ .  
 • الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  إذا و فقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $I$ .  
 • الدالة  $f' : x \mapsto f'(x)$  حيث  $f'(x)$  هو العدد المشتق للدالة  $f$  عند العدد  $x$  تسمى الدالة المشتقة للدالة  $f$ .

### • معادلة المماس

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد الحقيقي  $x_0$ .  
 $(\mathcal{E}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 • إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  فإن المنحنى  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل مماسا (T) عند النقطة A فاصلتها  $x_0$ .  
 معامل توجيه المماس (T) هو  $f'(x_0)$ .  
 معادلة المماس (T) هي :  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

### • التقريب التآلفي لدالة عند عدد حقيقي

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد  $x_0$ .  
 الدالة التآلفية  $g$  المعرفة كما يلي :  $g : x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$   
 تسمى التقريب التآلفي للمماس للدالة  $f$  عند العدد  $x_0$ .

### • قابلية الاشتقاق والاستمرارية

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد  $x_0$ .  
 إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  فإن  $f$  مستمرة عند  $x_0$ . (العكس غير صحيح).



الدوال المشتقة لدوال مألوقة

الدالة ...	معرفة على ...	قابلة للاشتقاق على ...	دالتها المشتقة هي ...
$k \in \mathbb{R} : x \mapsto k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$n \in \mathbb{Z} : x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}$ ، إذا كان $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ ، إذا كان $n < 0$	$\mathbb{R}$ ، إذا كان $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ ، إذا كان $n < 0$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$[0 ; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

العمليات الجبرية

$f, g$  دالتان معرفتان على نفس المجال  $I$  ؛  $k$  عدد حقيقي.  
إذا كانت  $f$  و  $g$  قابلتين للاشتقاق على المجال  $I$  فإن :

• الدالة  $f+g$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

• الدالة  $k.f$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $(k.f)'(x) = k.f'(x)$

\* • الدالة  $f.g$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

• الدالة  $\frac{1}{g}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  حيث  $g(x) \neq 0$  و  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$

• الدالة  $\frac{f}{g}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  حيث  $g(x) \neq 0$  و  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

الدالة المشتقة لدالة مركبة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد  $x_0$  ،  $g$  دالة معرفة على مجال  $J$  يشمل  $f(x_0)$ .  
• إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  و  $g$  قابلة للاشتقاق عند  $f(x_0)$  فإن الدالة  $g \circ f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0).g'[f(x_0)] \quad \text{و}$$

حالات خاصة

$f$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $I$  ؛  $n$  عدد صحيح.

• الدالة  $x \mapsto [f(x)]^n$  :  $g$  قابلة للاشتقاق على  $I$  (حيث  $f(x) \neq 0$  من أجل  $n < 0$ )

$$g'(x) = n.f'(x).[f(x)]^{n-1} \quad \text{و}$$

• الدالة  $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$  :  $h$  قابلة للاشتقاق على  $I$  (حيث  $f(x) > 0$ )  
 $h'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$  و

## • اتجاه تغيرات دالة

$f$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $I$ .

• إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) = 0$  فإن الدالة  $f$  ثابتة على  $I$ .

• إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) = 0$  من أجل قيم معزولة من  $I$ ) فإن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $I$ .

• إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) \leq 0$  ( $f'(x) = 0$  من أجل قيم معزولة من  $I$ ) فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $I$ .

## • النقطة الحدية للمنحنى

$f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح  $I$  يشمل العدد  $x_0$ .

$(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم.

• إذا كانت  $f$  تقبل قيمة حدية محلية عند  $x_0$  فإن  $f'(x_0) = 0$ .

• إذا كانت  $f'$  تنعدم عند  $x_0$  وتغير إشارتها فإن  $f$  تقبل قيمة حدية محلية عند  $x_0$ .

العدد  $f(x_0)$  هو قيمة عظمى أو قيمة صغرى للدالة  $f$  عند  $x_0$  من  $I$ .

في هذه الحالة النقطة ذات الإحداثيين  $(x_0 ; f(x_0))$  تسمى نقطة حدية للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .

• المماس للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  عند نقطة حدية فاصلتها  $x_0$ ، يوازي محور الفواصل

و معادلته هي  $y = f(x_0)$ .

## • الدوال المشتقة المتتابة

$f$  دالة قابلة للاشتقاق  $n$  مرة على مجال  $I$  حيث  $n \geq 1$ .

$f'$  دالتها المشتقة من المرتبة 1 :  $f^{(2)} = f'' = (f')'$  دالتها المشتقة من المرتبة 2 : ...

$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$  دالتها المشتقة من المرتبة  $n$ .

نضع :  $f'(x) = \frac{df}{dx}$  أو  $y' = \frac{dy}{dx}$  ؛  $f''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2f}{dx^2}$  ؛  $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$

## • نقطة إنعطاف لمنحنى

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  وقابلة للاشتقاق مرتان على  $I$ .  $x_0$  ينتمي إلى  $I$ . المنحنى الممثل

للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم.

• إذا كانت الدالة  $f''$  تنعدم وتغير الإشارة عند  $x_0$  فإن النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $x_0$  تسمى نقطة

انعطاف للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$ .

• المماس عند النقطة  $A$  يقطع المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  فيها.



### المعادلات التفاضلية

$f$  دالة مألوفة، مستمرة على مجال  $I$ .

• حل معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = f(x)$  أو  $y'' = f(x)$

• نبحث عن الدوال  $g$  القابلة للاشتقاق مرة أو مرتين على  $I$  حيث  $g'(x) = f(x)$  أو  $g''(x) = f(x)$ .

• حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال  $x \mapsto g(x)$

• حل معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = f(x)$  أو  $y'' = f(x)$  نستعين بجدول الدوال المشتقة لدوال مألوفة.

### مخطط لدراسة دالة

يمكن تنظيم دراسة دالة  $f$  حسب المخطط التالي :

• نعين مجموعة التعريف (تبسيط عبارة  $f(x)$  عند الضرورة).

• نعين مجموعة دراسة الدالة : خواص هندسية للمنحنى (دالة فردية، دالة زوجية، دالة دورية).

• نحسب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة.

• ندرس الاستمرارية، الاشتقاق، التغيرات :

نحسب الدالة المشتقة، ندرس إشارتها ثم نستنتج اتجاه تغير الدالة.

• ندرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة.

• نرسم التمثيل البياني بعد تعليم بعض النقاط الخاصة (مركز تناظر، نقطة إنعطاف، ...) و بعض

المستقيمات الخاصة (محور تناظر، مستقيمات مقاربة، مماسات، ...).

• نستفيد من الخواص البارزة لانهماز الرسم (عناصر التناظر، ...).

1 دراسة قابلية اشتقاق دالة عند عدد حقيقي و تعيين العدد المشتق

تمرين

• أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند العدد الحقيقي  $x_0$  ثم عين العدد المشتق  $f'(x_0)$  عند وجوده في كل حالة من الحالات التالية :

$$x_0 = 0 : f(x) = \sqrt{x} \quad \bullet 4 \quad x_0 = 0 : f(x) = x^2 - 2x - \sin x \quad \bullet 1$$

$$x_0 = 1 : f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \bullet 5 \quad x_0 = -1 : f(x) = (2x-3)^2 \quad \bullet 2$$

$$x_0 = 0 : f(x) = x^2 + |x| \quad \bullet 3$$

حل

1 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x^2 - 2x - \sin x$  عند العدد 0 .  
الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  (لأن  $f$  مجموع دوال معرفة على  $\mathbb{R}$ ) و  $f(0) = 0$ .

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 2x - \sin x}{x} = x - 2 - \frac{\sin x}{x}, \text{ لدينا من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ غير منعدم ,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -3 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - 2 - \frac{\sin x}{x} \right) = 0 - 2 - 1 = -3 \text{ و}$$

بما أن نهاية النسبة  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  عندما  $x$  يؤول إلى 0 هي عدد حقيقي، فإن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق

عند العدد 0 و العدد المشتق للدالة  $f$  عند 0 هو  $f'(0)$  حيث  $f'(0) = -3$ .

2 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = (2x-3)^2$  عند -1 .  
الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  لأنها مربع دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $f(-1) = 25$ .  
لدينا من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن -1 .

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{(2x-3)^2 - 25}{x+1} = \frac{(2x-8) \times 2(x+1)}{x+1} = 4x - 16$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -20 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (4x - 16) = -20 \text{ لدينا}$$

بما أن نهاية النسبة  $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$  عند ما يؤول  $x$  إلى -1 هي عدد حقيقي، فإن الدالة  $f$  قابلة

للاشتقاق عند -1 و  $f'(-1) = -20$ .

3 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x^2 + |x|$  عند العدد 0 .  
الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  (مجموع دالتين معرفتين على  $\mathbb{R}$ ) و  $f(0) = 0$ .

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + |x|}{x} = x + \frac{|x|}{x}, \text{ لدينا من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ غير منعدم ,}$$

نعلم أن  $|x| = x$  إذا كان  $x \geq 0$  و  $|x| = -x$  إذا كان  $x \leq 0$ .

$$\lim_{x \geq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \geq 0} \left( x + \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \geq 0} (x + 1) = 1 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \leq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \leq 0} \left( x - \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \leq 0} (x - 1) = -1 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \leq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \geq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{بما أن}$$

فإن النسبة  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  لا تقبل نهاية عند العدد 0.

و بالتالي الدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^2 + |x|$  غير قابلة للاشتقاق عند العدد 0 مع الملاحظة أن  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين و  $f'(0) = 1$  و قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليسار و  $f'(0) = -1$ .

4. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \sqrt{x}$  عند 0.

الدالة  $f$  معرفة عند 0 و  $f(0) = 0$ .

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ موجب تماما ،}$$

$$\lim_{x \geq 0} \sqrt{x} = 0 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \geq 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

و بالتالي  $\lim_{x \geq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ . هذه النهاية ليست عددا حقيقيا.

ينتج أن الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \sqrt{x}$  غير قابلة للاشتقاق عند 0.

4. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  عند 1.

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

بما أن الدالة  $f$  غير معرفة عند العدد 1 فإنها غير قابلة للاشتقاق عند العدد 1.

## 2 تعيين معادلة مماس للمنحنى الممثل لدالة عند نقطة منه فاصلتها $x_0$

### تمرين

• في كل حالة من الحالات التالية، حدد إن كان المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  يقبل مماسا أو نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ . عين معادلة لهذا المماس عند وجوده.

$$x_0 = 1 : f(x) = |x^3 - 1| \quad \bullet 3$$

$$x_0 = 1 : f(x) = 3x^2 - x - 2 \quad \bullet 1$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4} : f(x) = \cos x \quad \bullet 4$$

$$x_0 = 2 : f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} \quad \bullet 2$$



1. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = 3x^2 - x - 2$  عند العدد 1.  
الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $f(1) = 0$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = \frac{(3x + 2)(x - 1)}{x - 1} = 3x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5 \text{ لدينا أيضا}$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 5$  هي عدد حقيقي فإن  $f$  قابلة للاشتقاق عند 1 و  $f'(1) = 5$ .

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 1، معادلته  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ .

لدينا  $f(1) = 0$  و  $f'(1) = 5$ . إذن معادلة المماس هي  $y = 5x - 5$ .

2. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$  عند العدد 2.

الدالة  $f$  معرفة عند كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $x^2 - x - 2 \geq 0$ .

2 و 1- هما جذرا ثلاثي الحدود  $x^2 - x - 2$ .

إذن مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$  و  $f(2) = 0$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$  :

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \frac{\sqrt{(x + 1)(x - 2)}}{x - 2} = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}} = +\infty \text{ لدينا}$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$  ليست عددا حقيقيا فإن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند العدد 2.

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل نصف مماس يوازي محور الترتيب معادلته  $x = 2$  مع  $x \geq 2$ .

3. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = |x^3 - 1|$  عند العدد 1.

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $f(1) = 0$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|x^3 - 1| - 0}{x - 1} = \frac{|x^3 - 1|}{x - 1}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1 \text{ فإن } x > 1 \text{ نلاحظ أن إذا كان}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-(x^3 - 1)}{x - 1} = \frac{-(x - 2)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = -(x^2 + x + 1) \text{ فإن } x < 1 \text{ و إذا كان } x < 1$$

$$\lim_{x \geq 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \geq 1} (x^2 + x + 1) = 3 \text{ ينتج أن}$$

$$\lim_{x \leq 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \leq 1} [-(x^2 + x + 1)] = -3 \text{ و}$$

نلاحظ أن  $\lim_{x \geq 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  و  $\lim_{x \leq 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  هما عدداً حقيقيين مختلفان إذن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند العدد 1 عن اليمين و عن اليسار و ليست قابلة للاشتقاق عند العدد 1 .  
و بالتالي المنحى (C) يقبل نصف مماس  $(\Delta_1)$  عن اليمين و نصف مماس  $(\Delta_2)$  عن اليسار عند النقطة من (C) ذات الفاصلة 1 .

• إيجاد معادلة نصف المماس  $(\Delta_1)$ .

$$\text{لدينا } y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ حيث } f'(1) = 3 \text{ أي } y = 3(x - 1) + 0$$

$$\text{إذن } (\Delta_1) : y = 3x - 3 \text{ حيث } x \geq 1$$

• إيجاد معادلة نصف المماس  $(\Delta_2)$ .

$$\text{لدينا } y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ حيث } f'(1) = -3$$

$$\text{أي } y = -3(x - 1) + 0$$

$$\text{إذن } (\Delta_2) : y = -3x + 3 \text{ حيث } x \leq 1$$

3 . دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \cos x$  عند العدد  $\frac{\pi}{4}$ .

$$\text{الدالة } f \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ و } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $\frac{\pi}{4}$  :

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{-2 \sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{-\sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)} \cdot \sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)} = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ لدينا}$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ينتج أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند العدد  $\frac{\pi}{4}$  و  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  و بالتالي المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مماسا  $(\Delta)$

عند النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\pi}{4}$  معادلته  $y = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

أي  $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$  . ينتج أن  $(\Delta) : y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$

### 3 تعيين الدالة المشتقة لدالة

#### تقريب

• عين مجموعة تعريف كل دالة  $f$  من الدوال التالية ثم مجموعة قابلية الاشتقاق و الدالة المشتقة لها.

$$f(x) = \cos 2x - 2\cos x \quad \bullet 5$$

$$f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)} \quad \bullet 6$$

$$f(x) = (5x^2 - x)^3 \quad \bullet 7$$

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \bullet 8$$

$$f(x) = x^2 + x + \frac{3}{x} \quad \bullet 1$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1} \quad \bullet 2$$

$$f(x) = x + 3\sqrt{x^2 - 1} \quad \bullet 3$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} \quad \bullet 4$$

#### حل

1. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = x^2 + x + \frac{3}{x}$

الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم ،  $f'(x) = 2x + 1 - \frac{3}{x^2}$

2. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1}$

الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]1; +\infty[$  و  $]-\infty; 1[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1 ،  $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2}$

3. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = x + 3\sqrt{x^2 - 1}$

الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]-1; +\infty[$  و  $]-\infty; -1[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجموعة  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$   $f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$



4. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$

الدالة  $f$  معرفة على  $[-1 + \sqrt{2}; +\infty[ \cup ]-\infty; -1 - \sqrt{2}]$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $[-1 + \sqrt{2}; +\infty[$  و  $] -\infty; -1 - \sqrt{2}]$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[-1 + \sqrt{2}; +\infty[ \cup ]-\infty; -1 - \sqrt{2}]$  :  $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$

5. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$   
الدالة  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$

6. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)}$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $1 - \cos x \geq 0$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $2k\pi$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $2k\pi$  :  $f'(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2(1 - \cos x)}}$

7. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = (5x^2 - x)^3$

الدالة  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

بوضع  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 5x^2 - x$

لدينا الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g'(x) = 10x - 1$

نلاحظ أن  $f(x) = [g(x)]^3$  . إذن  $f'(x) = 3 \times g'(x) \cdot g(x)^2$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 3(10x - 1)(5x^2 - x)^2$

8. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

الدالة  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 2x + \frac{\pi}{3}$

و  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = \sin x$  ينتج أن  $f = h \circ g$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g'(x) = 2$

و الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $h'(x) = \cos x$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = g'(x) \times h'(g(x)) = 2 \times \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

إذن الدالة المشتقة للدالة  $f$  هي الدالة  $f'$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f'(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

## تمرين

• ادرس اتجاه تغيرات كل دالة  $f$  من الدوال التالية المعرفة كما يلي :

$$f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x} \quad \bullet 3$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2} \quad \bullet 1$$

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} \quad \bullet 4$$

$$f(x) = x + \sin x \quad \bullet 2$$

## حل

1. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ .

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  (لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $x^2 + 2 > 0$ ).

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب ،  $f'(x) \geq 0$  . إذن الدالة  $f$  متزايدة على  $[0 ; +\infty[$ .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  سالب ،  $f'(x) \leq 0$  . إذن الدالة  $f$  متناقصة على  $] -\infty ; 0]$ .

2. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x + \sin x$ .

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 1 + \cos x$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $1 + \cos x \geq 0$ .

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) \geq 0$  . ينتج أن الدالة متزايدة على  $\mathbb{R}$ .

3. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x}$ .

الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $] -\infty ; 0[ \cup ] 0 ; +\infty [$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $] -\infty ; 0[$  و  $] 0 ; +\infty [$ .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم ،  $f'(x) = 5 - \frac{1}{x^2}$ .

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل.

الدالة  $f$  متزايدة على كل من المجالين

$$\left] -\infty ; -\frac{\sqrt{5}}{5} \right] \text{ و } \left[ \frac{\sqrt{5}}{5} ; +\infty \right[$$

و متناقصة على كل من المجالين  $\left[ -\frac{\sqrt{5}}{5} ; 0 \right[$  و  $\left] 0 ; \frac{\sqrt{5}}{5} \right]$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$0$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+

4. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ .

الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  و قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما ،  $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+

الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]0; 1[$

و متزايدة على المجال  $[1; +\infty[$ .

## 5 إيجاد القيم الحدية لدالة

### تمارين

• عين القيم الحدية لكل دالة من الدوال  $f$  المعرفة كما يلي :

3.  $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$

1.  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$

2.  $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$

### حل

1. تعيين القيم الحدية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ .

الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty; +\infty[$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = -4x^3 + 4x$

$f'(x) = 4x(1-x)(1+x)$  يكتب على الشكل

$x$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$(1-x)(1+x)$	-	○	+	+	○	-
$4x$	-	-	○	+	+	+
$f'(x)$	+	○	-	+	○	-

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل :

• استنتاج القيم الحدية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $f'$  تنعدم و تغير الإشارة عند كل

من الأعداد -1 ، 0 ، 1

إذن الدالة  $f$  تقبل قيمة كبرى عند -1 على المجال  $]-\infty; 0[$  وهي  $f(-1) = 2$ .

و الدالة  $f$  تقبل قيمة صغرى عند 0 على المجال  $[-1; 1]$  وهي  $f(0) = 1$

و الدالة  $f$  تقبل قيمة كبرى عند 1 على المجال  $[0; +\infty[$  وهي  $f(1) = 2$ .

2. تعيين القيم الحدية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$ .

الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty; +\infty[$  و قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty; +\infty[$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 12x^2 - 3$

$f'(x) = 3(2x+1)(2x-1)$  يكتب أيضا على الشكل :



$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل :

• استنتاج القيم الحدية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $f'$  تنعدم و تغير الإشارة عند  $-\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$

إذن الدالة  $f$  تقبل قيمة كبرى على المجال  $]-\infty; \frac{1}{2}]$  و هي  $f(-\frac{1}{2}) = 0$  حيث  $f(-\frac{1}{2}) = 0$ .

و تقبل قيمة صغرى على المجال  $[-\frac{1}{2}; +\infty[$  و هي  $f(\frac{1}{2}) = -2$  حيث  $f(\frac{1}{2}) = -2$ .

3. تعيين القيم الحدية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$ .

• الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[2; +\infty[$ .

• الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[2; +\infty[$ .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[2; +\infty[$  :  $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

$f'(x)$  يكتب أيضا على الشكل :  $f'(x) = \frac{\sqrt{x-2} - 1}{\sqrt{x-2}}$

إشارة  $f'(x)$  على المجال  $[2; +\infty[$  هي إشارة  $\sqrt{x-2} - 1$  على المجال  $[2; +\infty[$ .

إشارة  $f'(x)$  على المجال  $[2; +\infty[$  ملخصة في الجدول المقابل :

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+

الدالة  $f'$  تنعدم و تغير الإشارة عند 3

إذن الدالة  $f$  تقبل قيمة صغرى عند

العدد 3 و هي  $f(3) = 1$  حيث  $f(3) = 1$ .

## 6 البحث عن الدوال المشتقة المتتابة لدالة

### تمرين 1

• عين الدالة المشتقة الثانية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$   
• أثبت أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثيها.

### حل

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (لأن  $f$  دالة كثير الحدود)

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 3x^2 - 6x$

الدالة  $f'$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f''(x) = 6x - 6$

الدالة  $f''$  تنعدم عند العدد 1 و تغير الإشارة إذن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل نقطة انعطاف إحداثيها (1 ; 2).

### تمرين 2

• عين الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  لكل من الدالتين  $\sin$  و  $\cos$  :  $n$  عدد طبيعي غير منعدم.

1. تعيين الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  للدالة  $\sin$ .

الدالة  $\sin$  : قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ،  $n$  مرة حيث  $n \geq 1$ .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $(\sin)'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$(\sin)''(x) = (\cos x)'(x) = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

يمكن وضع التخمين التالي :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم ، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$  ، استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات صحة هذا التخمين.

من أجل  $n = 1$  :  $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$  أي  $(\sin)'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

نفرض أن من أجل العدد الطبيعي  $k$  غير المنعدم ،  $(\sin)^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$  ،

حساب  $(\sin)^{(k+1)}(x)$ .

$$(\sin)^{(k+1)}(x) = \left[\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $k$  غير منعدم و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،

إذا كان  $(\sin)^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$  فإن  $(\sin)^{(k+1)}(x) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :  $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

و بالتالي الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  للدالة  $\sin$  هي الدالة  $\sin^{(n)}$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

2. نبرهن بنفس الطريقة أن الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  للدالة  $\cos$  هي الدالة  $\cos^{(n)}$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي :  $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

8 حل معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = f(x)$  أو  $y'' = f(x)$  حيث  $f$  دالة مألوفة

تمرين

• حل كل معادلة التفاضلية من المعادلات التالية :

$$y' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \quad \bullet 5$$

$$y' = 3x - 2 \quad \bullet 1$$

$$y'' = 2 \quad \bullet 6$$

$$y' = \sin x \quad \bullet 2$$

$$y'' = \sin x \quad \bullet 7$$

$$y' = x + \sin x \quad \bullet 3$$

$$y'' = \cos x \quad \bullet 8$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \bullet 4$$



1. حل المعادلة التفاضلية  $y' = 3x - 2$ .

نبحث عن الدوال العددية  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث  $f'(x) = 3x - 2$ .

الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x$  تحقق المعادلة التفاضلية  $y' = 3x - 2$  لأن  $f'(x) = 3x - 2$ .

ينتج أن الدوال العددية حلول المعادلة التفاضلية  $y' = 3x - 2$  هي الدوال  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + c \quad \text{حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

2. حل المعادلة التفاضلية  $y' = \sin x$ .

نبحث عن الدوال العددية  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث  $f'(x) = \sin x$ .

$$\text{نعلم أن } \cos' x = -\sin x$$

$$\text{إذن } -\cos' x = \sin x \quad \text{أي } (-\cos)'(x) = \sin x$$

وبالتالي الدالة  $-\cos$  هي حل للمعادلة التفاضلية  $y' = \sin x$ . ينتج أن الدوال العددية حلول المعادلة

التفاضلية  $y' = \sin x$  هي الدوال  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = -\cos x + c$  حيث  $c$  عدد حقيقي.

3. حل المعادلة التفاضلية  $y' = x + \sin x$ .

باستعمال النتائج المحصل عليها في الحالتين السابقتين، تكون حلول المعادلة التفاضلية

$$y' = x + \sin x \quad \text{هي الدوال } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c$$

حيث  $c$  عدد حقيقي.

4. حلول المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  هي الدوال  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :

$$f(x) = 2\sqrt{x} + c \quad \text{حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

5. حلول المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+x+1} \quad \text{حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

6. حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = 2$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = x^2 + cx + d \quad \text{حيث } c \text{ و } d \text{ عددان حقيقيان.}$$

7. حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = \sin x$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = -\sin x + cx + d \quad \text{حيث } c \text{ و } d \text{ عددان حقيقيان.}$$

8. حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = \cos x$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = -\cos x + cx + d \quad \text{حيث } c \text{ و } d \text{ عددان حقيقيان.}$$



## تمارين و حلول نموذجية

### تمرين

•  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$

(E) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و مجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. عين مجموعة تعريف  $D$  للدالة  $f$ .

2. أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$  ،

حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3. عين نهايات الدالة  $f$  عند حدود المجموعة  $D$ .

4. ادرس تغيرات الدالة  $f$  و انجز جدول تغيراتها.

5. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (E).

6. ادرس الوضع النسبي للمنحنى (E) و المستقيم المقارب (Δ) للمنحنى (E).

7. احسب  $f(-1)$  . ماذا تستنتج ؟ ارسم المنحنى (E) في المعلم السابق.

8. ناقش بيانيا ، عدد و إشارة حلول المعادلة  $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$  في  $\mathbb{R}$

حسب قيم العدد الحقيقي  $m$ .

### حل

1. الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  . إذن  $D = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

2. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$  ،

$$= 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  :  $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$  إذن  $a = 2$  :  $b = 1$  :  $c = 1$

3. تعيين نهايات الدالة  $f$  عند حدود المجموعة  $D$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

( $f$ ) هي مجموعة الدالتين  $f_1$  و  $f_2$  حيث  $f_1(x) = 2x + 1$  و  $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} (2x^3 + x^2 + 1) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم ؛  $x > 0$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

4. الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^3}$$

دراسة إشارة  $f'(x)$  على  $D$ .

من الجدول المقابل، ينتج أن الدالة  $f$  متزايدة على كل من المجالين  $]-\infty; 0[$  و  $]1; +\infty[$

و متناقصة على المجال  $]0; 1[$ .

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - 1$	-		- 0 +	+
$x^2 + x + 1$	+		+	+
$x^3$	-		+	+
$f'(x)$	+		- 0 +	+

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي :  
نلاحظ أن النقطة ذات الإحداثيين  $(1; 4)$  هي نقطة حدية صغرى للمنحنى  $(\mathcal{C})$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

5. دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$ ، يوازي محور الترتيب.

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $f(x) - 2x - 1 = \frac{1}{x^2}$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x + 1)) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1)) = 0$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

6. دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  و المستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$ .

دراسة إشارة العبارة  $f(x) - (2x + 1)$  على  $D$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f(x) - (2x + 1) = \frac{1}{x^2}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $\frac{1}{x^2} > 0$

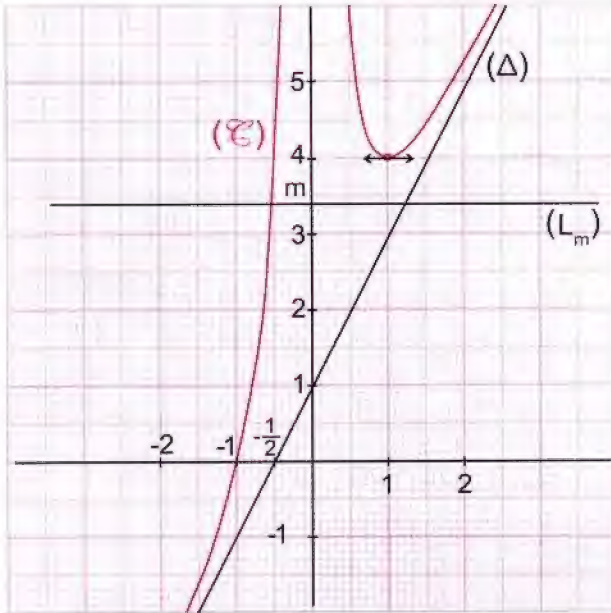
إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f(x) - (2x + 1) > 0$

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  فوق المستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$ .

7.  $f(-1) = 0$ . نستنتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيين  $(-1; 0)$ .

## تمارين و حلول نموذجية

8. رسم المنحنى (E).



9. مناقشة عدد و إشارة حلول المعادلة  $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$  في  $\mathbb{R}$  بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي  $m$ .

المعادلة  $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$  تكتب على الشكل  $\frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2} = m$  حيث  $x$  ينتمي إلى  $D$  أو أيضا  $f(x) = m$  حيث  $x$  ينتمي إلى  $D$ .

معادلة المنحنى (E) هي  $y = f(x)$ .

ليكن  $(L_m)$  المستقيم ذا المعادلة  $y = m$  : عدد حقيقي.

حلول المعادلة  $f(x) = m$  هي فواصل نقطة تقاطع (E) و  $(L_m)$ .

النتائج تلخص في الجدول الموالي :

m	$-\infty$	4	$+\infty$
النتائج	المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا		المعادلة تقبل ثلاثة حلول : حل سالب و حلان مختلفان موجبان.
	المعادلة تقبل حلا سالبا و حلا مضعفا موجبا و هو 1.		



## تمارين و مسائل

1.  $f: x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 3}{x}$
2.  $f: x \mapsto \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 2}$
3.  $f: x \mapsto \frac{3x^2 - 4x}{4(1 - x)}$
4.  $f: x \mapsto \frac{x^3 + 4x^2 + x - 2}{(x + 1)^2}$
5.  $f: x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x + 1)}$
6.  $f: x \mapsto 2x + 1 - \frac{2}{(1 - x)^2}$
7.  $f: x \mapsto x + 3\sqrt{x^2 - 1}$
8.  $f: x \mapsto (x - 1)\sqrt{2x}$
9.  $f: x \mapsto \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}}$
10.  $f: x \mapsto \frac{1}{4} - \left(\frac{2x + 1}{4}\right) \cos \pi x$
11.  $f: x \mapsto \sqrt{\cos 2x}$
12.  $f: x \mapsto \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x}$

### الإستمرارية وقابلية الاشتقاق

4 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = 1 - (x - 1)|x - 1|$$

- ادرس إستمرارية  $f$  عند العدد 1.
- ادرس قابلية اشتقاق  $f$  عند العدد 1.

5  $f$  هي دالة معرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} - \frac{1}{x}$$

- 1. عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
- 2. نعرف الدالة  $g$  كما يلي :
- $g(x) = f(x)$  إذا كان  $x \neq 0$  و  $g(0) = 0$
- هل الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق عند 0 ؟
- هل الدالة  $g$  مستمرة عند 0 ؟

### قابلية الاشتقاق - العدد المشتق

1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند العدد  $x_0$   
عين العدد المشتق لها عند  $x_0$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$x_0 = 1 : f: x \mapsto -\frac{x^2}{2} + 3x - 1$$

$$x_0 = 5 : f: x \mapsto \frac{x + 2}{-x + 7}$$

$$x_0 = -2 : f: x \mapsto 3x^5 - 4x^3 + 21$$

$$x_0 = 0 : f: x \mapsto 2 - x + x \sin |x|$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4} : f: x \mapsto \cos x$$

$$x_0 = 0 : f: x \mapsto (2x - 3)^2$$

$$x = 0 : f: x \mapsto x\sqrt{x}$$

$$x_0 = 0 : f: x \mapsto |x|$$

### معادلة المماس

2 عين معادلة المماس (أو نصف مماس) للمنحنى

مثل للدالة  $f$  عند النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $x_0$

في كل حالة من الحالات التالية :

$$x_0 = 3 : f(x) = x^2 + x - 5$$

$$x < 1 : f(x) = \sqrt{1 - x}$$

$$f(1) = 0$$

$$x > 1 : f(x) = -\sqrt{x - 1}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_0 = 2 : f(x) = |x^3 - 8|$$

$$x_0 = 0 : f(x) = \sqrt{x}$$

$$x_0 = 2 : f(x) = \sqrt{|x - 2|}$$

$$x_0 = 1 : f(x) = x^2 + 2|x - 1|$$

$$x_0 = -2 : f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$$

### الدوال المشتقة

3  $f$  دالة معرفة على مجموعة  $D$ .

عين المجموعة  $D$  و المجموعة  $D'$  التي تقبل عليها  $f$

لاشتقاق ثم عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$

في كل حالة من الحالات التالية :

مسائل

- 10)  $f$  دالة معرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$  ( $\mathbb{C}$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسحب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
1. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
  2. أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$ .
  3. عين إحداثيي  $A$  نقطة تقاطع ( $\mathbb{C}$ ) مع المحاور.
  4. بين أن النقطة  $A$  مركز تناظر المنحنى ( $\mathbb{C}$ ).
  5. ارسم المنحنى ( $\mathbb{C}$ ) و المماس عند  $A$ .
- الوحدة 2 cm.

- 11)  $f$  دالة كثير الحدود معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$
1. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
  2. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا واحدا.
- حيث  $1,6 < \alpha < 1,7$ .
- ب)  $g$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$ .
- ( $\mathbb{C}$ ) المنحنى الممثل للدالة  $g$  في المستوي المنسحب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- الوحدة 4 cm.

1. ادرس تغيرات الدالة  $g$  ( بإمكانك إستعمال نتائج السؤال 1).
2. عين معادلة المماس ( $\Delta$ ) للمنحنى ( $\mathbb{C}$ ) عند النقطة  $A$  فاصلتها 0.
3. ادرس الوضع النسبي للمنحنى ( $\mathbb{C}$ ) و المماس ( $\Delta$ ) في المجال  $]1; -1[$ . بين أن ( $\mathbb{C}$ ) يقطع ( $\Delta$ ) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
4. ارسم المنحنى ( $\mathbb{C}$ )، المماس ( $\Delta$ ) و المماس ( $\Gamma$ ) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

إتجاه التغيرات

- 6) عين مجموعة تعريف الدالة  $f$  ثم أدرس إتجاه تغيراتها على هذه المجموعة في كل حالة من الحالات التالية :
1.  $f(x) = x^3(1-x)^3$
  2.  $f(x) = x - 5\sqrt{x}$
  3.  $f(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{x - 2}$
  4.  $f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x^2}$
  5.  $f(x) = x + \sin x$
  6.  $f(x) = x - \tan x$
  7.  $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 4x^3$
  8.  $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$
  9.  $f(x) = \frac{x+1}{2x-5}$
  10.  $f(x) = 4x^3 - 6x^2$

الدوال المشتقة المتتابة

- 7)  $f$  دالة معرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  بين أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم، الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق  $n$  مرة عند كل عدد حقيقي يختلف عن 1.
- عين، بدلالة  $n$  : عبارة  $f^{(n)}(x)$  من أجل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

- 8) عين الدوال المشتقة المتتابة للدوال  $f$  في الحالات التالية :

1.  $f: x \mapsto x^5 - 2x^4 + x^2 - x + 1$
2.  $f: x \mapsto \frac{1}{2x-1}$
3.  $f: x \mapsto \sin 2x$

- 9)  $f$  دالة معرفة كما يلي :

$$f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- بين أن الدالة  $f$  تحقق المعادلة التفاضلية  $y'' + 9y = 0$

## تمارين و مسائل

ب) . لتكن  $h$  الدالة المعرفة كما يلي :

$$h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$$

• احسب  $h(1)$ . حلل  $h(x)$  إلى جداء عوامل.

• ادرس إشارة  $h(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$ .

2. نريد دراسة الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 4}{x + 1} \quad \text{كما يلي :}$$

ليكن  $(\mathbb{E}_f)$  المنحنى الممثل لها.

أ) . ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

ب) . بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$f(x) = ax^2 + bx + \frac{c}{x+1} \quad ; \quad \mathbb{R} - \{-1\}$$

حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ج) . ادرس الأوضاع النسبية للمنحنيين  $(\mathbb{E}_f)$  و  $(\mathbb{E}_g)$ .

د) . ارسم بعناية المنحنيين  $(\mathbb{E}_f)$  و  $(\mathbb{E}_g)$

في نفس المعلم.

$$f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1} \quad \text{دالة معرفة كما يلي :}$$

• عين العددين  $a$  و  $b$  حتى يقبل المنحنى الممثل

دالة  $f$  مماسا عند النقطة  $O(0; 0)$  يوازي

مستقيم  $(D)$  ذا المعادلة  $y = 4x + 3$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $f$  ثم ارسم المنحنى  $(\mathbb{E}_f)$

ممثل لها بعناية في معلم متعامد و متجانس

مناسب  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

13 حل كل معادلة من المعادلات التفاضلية التالية:

$$y'' = 0 \quad .6 \quad y' = 0$$

$$y'' = \frac{1}{2} \quad .7 \quad y' = -5$$

$$y'' = x - 2 \quad .8 \quad y' = \sqrt{2}x - 1$$

$$y'' = \frac{1}{2}x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad .9 \quad y' = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$y'' = \sin \frac{\pi}{3} x \quad .10 \quad y' = x - \cos 2x$$

14 لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]a; +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

• احسب  $f'''(x) : f''(x) : f'(x)$ .

2. ضمن عبارة  $f^{(n)}(x)$  من أجل  $n$  عدد طبيعي

غير منعدم.

• رهن بالتراجع، صحة هذا التخمين.

3. لتكن  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

عين عددين حقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث من أجل كل عدد

$$g(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1} \quad , \quad ]1; +\infty[$$

احسب  $g^{(n)}(x)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم.

15 المستوي منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. أ) . ارسم المنحنى  $(\mathbb{E}_g)$  الممثل للدالة  $g$

$$g(x) = x^2 - x \quad \text{المعرفة كما يلي :}$$



أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation

### • تعريف دالة أصلية لدالة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$ . نسمي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$  كل دالة  $F$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $I$  حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $F'(x) = f(x)$ .

### • مبرهنة (وجود دالة أصلية)

كل دالة معرفة و مستمرة على مجال  $I$  تقبل على الأقل دالة أصلية على هذا المجال.

### • مبرهنة

إذا كانت  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و  $F$  دالة أصلية لها على  $I$  فإن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $I$  هي الدوال  $G$  المعرفة على  $I$  كما يلي :  
من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $G(x) = F(x) + c$  حيث  $c$  عدد حقيقي.

### • مبرهنة

$f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $I$  و  $F$  دالة أصلية لها على  $I$ .  
إذا كان  $x_0 \in I$  و  $y_0 \in \mathbb{R}$  فإنه توجد دالة أصلية وحيدة  $G$  للدالة  $f$  حيث  $y_0 = G(x_0)$  و معرفة على  $I$  كما يلي : من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ .

• **نتيجة :** إذا كانت  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و  $F$  دالة أصلية لها على  $I$  فإن الدالة  $x \mapsto F(x) - F(x_0)$  المعرفة على  $I$  هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة  $f$  على  $I$  و التي تنعدم عند  $x_0$ .

### • دوال أصلية لدوال مألوفة

الدالة $f$ هي الدالة ...	الدوال الأصلية للدالة $f$ هي الدوال $F$ ...	مجال تعريف $I$ للدالتين $f$ و $F$
$x \mapsto kx$ حيث $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	إذا كان $n \geq 1$ فإن $I = \mathbb{R}$ إذا كان $n \leq -2$ فإن $I = ]-\infty; 0[$ أو $I = ]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = ]0; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax + b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax + b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = ]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$u$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $c$  عدد حقيقي.

الدالة $f$ معرفة كما يلي ...	الدوال الأصلية $F$ للدالة $f$ معرفة كما يلي ...	ملاحظات
$f(x) = u'(x) \cdot u(x)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot u(x)^{n+1} + c$	إذا كان $n > 0$ فإن $I = \mathbb{R}$ إذا كان $n < 0$ و $n \neq -1$ فإن $I = \mathbb{R}$ باستثناء الأعداد $x$ من $I$ حيث $u(x) = 0$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c$	$I = \mathbb{R}$ باستثناء الأعداد $x$ من $I$ حيث $u(x) \leq 0$
$f(x) = [\cos u(x)] \cdot u'(x)$	$F(x) = \sin u(x) + c$	$I$
$f(x) = [\sin u(x)] \cdot u'(x)$	$F(x) = -\cos u(x) + c$	$I$
$f(x) = (v' \circ u)(x) \cdot u'(x)$	$F(x) = (v \circ u)(x) + c$	$v$ هي دالة قابلة للاشتقاق على المجال $J$ حيث $f(I) \subset J$

• **ملاحظة:** يمكن لدالة أن تكون غير قابلة للاشتقاق على مجال و تقبل دوالا أصلية على هذا المجال.

الدالة  $x \mapsto \sqrt{x}$  مستمرة على  $[0; +\infty[$  وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  لكنها تقبل على الأقل دالة أصلية على  $[0; +\infty[$  مثل الدالة  $x \mapsto \frac{2}{3} x \sqrt{x}$ .



1 تعيين دوال أصلية بسيطة

تمرين 1

$F(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$  : كما يلي  $\mathbb{R}$  دالة معرفة على

و  $f(x) = 6x^2 - 2x + 3$  : كما يلي  $\mathbb{R}$  دالة المعرفة على

1- بين أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

2- عين دالة أصلية أخرى  $G$  للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

حل

• الدالة  $F$  دالة كثير الحدود. إذن  $F$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$F'(x) = 6x^2 - 2x + 3. \text{ نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي } x : F'(x) = f(x).$$

ينتج أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ . و بالتالي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

هي الدوال  $x \mapsto F(x) + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ .

• لإيجاد دالة أصلية أخرى  $G$  للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ ، يكفي تغيير الحد الثابت في عبارة  $F(x)$ .

الدالة  $G$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $G(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

تمرين 2

1- أوجد دالة أصلية لكل من الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين على  $I$  أو  $J$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4 \text{ و } I = \mathbb{R} : g(x) = \frac{1}{x^2} \text{ و } J = ]0; +\infty[.$$

2- أوجد كل الدوال الأصلية لكل دالة من الدالتين  $f$  و  $g$ .

حل

• الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

$$\text{و من أجل كل عدد حقيقي } x : F'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4.$$

$$= f(x)$$

إذن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $G$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $G(x) = -\frac{1}{x}$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$  ،  $G'(x) = \frac{1}{x^2}$  إذن الدالة  $G$  هي دالة أصلية للدالة

على المجال  $]0; +\infty[$ .

• الدوال  $x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$  هي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

الدوال  $x \mapsto -\frac{1}{x} + c'$  حيث  $c' \in \mathbb{R}$  هي الدوال الأصلية للدالة  $g$  على  $]0; +\infty[$ .

## 2 إيجاد الدالة الأصلية لدالة التي تأخذ قيمة $y_0$ عند العدد $x_0$

### تمرين

$f$  و  $g$  الدالتان المعرفتان على المجال  $I$  كما يلي :  $I = \mathbb{R}$  ;  $f(x) = x^2 - x$  ;  $I = ]-\infty; 0[$  ;  $g(x) = -\frac{1}{x^2}$

1- عين الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  والتي تأخذ القيمة 1 عند العدد 0.

2- عين الدالة الأصلية  $G$  للدالة  $g$  على  $] -\infty ; 0[$  والتي تنعدم عند العدد -2 .

### حل

• الدوال  $H$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $H(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + c$  :  $c \in \mathbb{R}$  هي الدوال الأصلية لـ  $f$

على  $\mathbb{R}$ . لدينا  $H(0) = 1$  أي  $\frac{1}{3} (0)^3 - \frac{1}{2} (0)^2 + c = 1$  . إذن  $c = 1$ . هذه الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$

هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 1$

• الدوال  $L$  المعرفة على  $] -\infty ; 0[$  كما يلي :  $L(x) = \frac{1}{x} + \lambda$  :  $\lambda \in \mathbb{R}$  هي الدوال الأصلية

للدالة  $g$  على  $] -\infty ; 0[$ . لدينا  $L(-2) = 0$  أي  $\frac{1}{-2} + \lambda = 0$  إذن  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

ينتج أن الدالة الأصلية للدالة  $g$  على المجال  $] -\infty ; 0[$  والتي تنعدم عند -2 هي الدالة  $G$

المعرفة على المجال  $] -\infty ; 0[$  كما يلي :  $G(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$

## 3 استعمال الدوال الأصلية لدوال مأثوفة

### تمرين 1

عين الدوال الأصلية لكل دالة من الدوال  $f$  على المجال  $I$  في الحالات التالية :

$$I = ]0 ; +\infty[ : f(x) = \frac{3}{x^2} - \cos x + 3 \quad (2) \quad I = \mathbb{R} : f(x) = x^5 + x^2 - 3x + 6 \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \cos 3x \quad (4) \quad I = ]0 ; +\infty[ : f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - 1 \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (5)$$

### حل

1. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = x^5 + x^2 - 3x + 6$  هي الدوال  $F$

المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 6x + c$  :  $c \in \mathbb{R}$  حيث

2. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]0 ; +\infty[$  حيث  $f(x) = \frac{3}{x^2} - \cos x + 3$  هي الدوال  $F$  المعرفة

على  $]0 ; +\infty[$  كما يلي :  $F(x) = -\frac{3}{x} - \sin x + 3x + c$  :  $c \in \mathbb{R}$  حيث

3. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]0 ; +\infty[$  حيث  $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - 1$  هي الدوال  $F$  المعرفة

على  $]0 ; +\infty[$  كما يلي  $F(x) = -4\sqrt{x} - \cos x - x + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ .

4. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = \cos 3x$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}.$$

5. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$\text{كما يلي : } F(x) = -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}.$$



- في كل حالة من الحالات التالية، تعرف على عبارة الدالة  $f$  ثم عين دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ .
- (1)  $I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
- (2)  $I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- (3)  $I = \mathbb{R} : f(x) = (x-2)(x^2-4x+1)^3$
- (4)  $I = \mathbb{R} : f(x) = \cos x \cdot \sin^4 x$

حل

1. بوضع  $u(x) = x^2 + x + 1$ . لدينا الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $u'(x) = 2x + 1$ . نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $u(x) \neq 0$  و  $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ . إذن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{-1}{u(x)} + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ . أي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{-1}{x^2+x+1} + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ .

2. بوضع  $u(x) = x^2 + 1$  و  $v(x) = \sqrt{x}$ . الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $u'(x) = 2x$ . الدالة  $v$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$ ،  $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . لدينا  $(v \circ u)(x) = v[u(x)] = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ . نلاحظ أن الدالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = u'(x) \times (v \circ u)(x) = (v \circ u)'(x)$ .

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $v \circ u$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$\begin{aligned} (v \circ u)(x) &= v[u(x)] + c \\ &= v(x^2 + 1) + c \\ &= \sqrt{x^2 + 1} + c \end{aligned}$$

أي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ .

**ملاحظة :** بوضع  $u(x) = x^2 + 1$ ؛ الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد  $x$ ،  $u(x) > 0$ . لدينا أيضا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $u'(x) = 2x$ .

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$  و بالتالي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \sqrt{u(x)} + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ . أي : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ .



3. بوضع  $u(x) = x^2 - 4x + 1$ ، الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد  $x$

$$u'(x) = 2x - 4. \text{ نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي } x : f(x) = \frac{1}{2} u'(x) \times u^3(x)$$

إذن الدوال الأصلية للدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = (x - 2) \times (x^2 - 4x + 1)^3$  هي الدوال

$$F \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي : } F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} u^4(x) + c \text{ حيث } c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{أي : من أجل عدد حقيقي } x : F(x) = \frac{1}{8} (x^2 - 4x + 1)^4 + c \text{ حيث } c \in \mathbb{R}.$$

4. بوضع  $u(x) = \sin x$ ، الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

$$\text{و من أجل كل عدد حقيقي } x, u'(x) = \cos x.$$

نلاحظ أن : من أجل كل عدد حقيقي  $x : f(x) = u'(x) \cdot u^4(x)$ . ينتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$

$$\text{المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي : } f(x) = \cos x \cdot \sin^4 x \text{ هي الدوال } F \text{ المعرفة على } \mathbb{R}$$

$$\text{كما يلي : } F(x) = \frac{1}{5} u^5(x) + c \text{ حيث } c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{إذن الدوال الأصلية للدالة } f \text{ هي الدوال } F \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي : } F(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x + c \text{ حيث } c \in \mathbb{R}.$$

تمرين 1

- $f$  دالة معرفة على المجال  $]1; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$
- بين أنه يوجد عدداً حقيقيين  $a$  و  $b$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  :  $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$
  - عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$ .
  - حدد الدالة الأصلية  $G$  للدالة  $f$  التي تنعدم عند العدد 2.

حل

- الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]1; +\infty[$  و من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > 1$  :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

ينتج أن  $a = 1$  و  $b = -1$  . وبالتالي من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > 1$  :  $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$

**ملاحظة :** يمكن توحيد المقامات في العبارة  $a + \frac{b}{(x-1)^2}$  ثم مقارنة عبارتي  $f(x)$  .

- الدالة  $f$  معرفة على  $]1; +\infty[$  و قابلة للاشتقاق على  $]1; +\infty[$  . نضع  $u(x) = x - 1$

الدالة  $u$  معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$  و من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > 1$  :  $u'(x) = 1$

$$\text{لدينا من أجل كل عدد } x, f(x) = 1 - \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$$

$$\text{إذن من أجل كل عدد } x \text{ حيث } x > 1, f(x) = \left[ x + \frac{1}{u(x)} \right]'$$

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]1; +\infty[$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $]1; +\infty[$  كما يلي :

$$F(x) = x + \frac{1}{x-1} + c \text{ حيث } c \in \mathbb{R}$$

- تعيين الدالة الأصلية للدالة  $f$  حيث  $F(2) = 0$  . لدينا  $F(2) = 0$  يعني  $2 + \frac{1}{2-1} + c = 0$

أي  $3 + c = 0$  إذن  $c = -3$  . ينتج أن الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  حيث  $F(2) = 0$

$$\text{هي الدوال } F \text{ المعرفة على } ]1; +\infty[ \text{ كما يلي } F(x) = x + \frac{1}{x-1} - 3$$

## تمرين 2

أوجد الدوال الأصلية على  $\mathbb{R}$  لكل من الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين كما يلي :

$$g(x) = \sin^4 x \quad ; \quad f(x) = \cos^4 x$$

**حل**

. تعيين العبارة الخطية لكل من  $\sin^4 x$  و  $\cos^4 x$

نضع  $\cos x + i \sin x = e^{ix}$  و  $\cos x - i \sin x = e^{-ix}$  (ترميز أولير)

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{و} \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cos^4 x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 (e^{ix} + e^{-ix})^4 \quad \text{و} \quad \sin^4 x = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 (e^{ix} - e^{-ix})^4$$

$$(e^{ix} + e^{-ix})^4 = e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} + 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x} \quad \text{لدينا}$$

$$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) + 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6$$

$$= 2 \cos 4x + 8 \cos 2x + 6$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{16} (2 \cos 4x + 8 \cos 2x + 6) \quad \text{و بالتالي}$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \quad \text{أي أن}$$

$$(e^{ix} - e^{-ix})^4 = e^{i4x} - 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} - 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x} \quad \text{لدينا أيضا}$$

$$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) - 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6$$

$$= 2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{16} (2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6) \quad \text{و بالتالي}$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \quad \text{أي أن}$$

إذن الدالتان  $f$  و  $g$  معرفتان كما يلي :

$$g(x) = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$F(x) = \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}$$

الدوال الأصلية للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $G$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$G(x) = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + c' \quad \text{حيث } c' \in \mathbb{R}$$



استعمال جدول الدوال المشتقة

4 عين الدوال الأصلية لكل دالة  $f$  من الدوال التالية على المجال  $I$ .

1.  $I = \mathbb{R} : f(x) = x^3 - 2x + 1$

2.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

3.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \sin x - 2\cos x$

4.  $I = ]-\infty; 0[ : f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$

5.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right)$

6.  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ : f(x) = 1 - \frac{1}{\cos x^2}$

7.  $I = \mathbb{R} : f(x) = (x-3)^4$

8.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \sin x \cos^2 x$

9.  $I = \mathbb{R} : f(x) = 4x(x^2 + 4)^2$

10.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$

11.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$

12.  $I = ]3; +\infty[ : f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

13.  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[ : f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

14.  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[ : f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

15.  $I = ]-1; +\infty[ : f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

16.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{3 + \sin x}}$

17.  $I = ]-1; 1[ : f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

18.  $I = \mathbb{R} : f(x) = x \cos x + \sin x$

19.  $I = ]-1; +\infty[ : f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

20.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

عموميات على الدوال الأصلية

1 في كل حالة من الحالات التالية، أثبت أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ .

1.  $f(x) = 3x^2 - 1$

2.  $I = \mathbb{R} : F(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$   
 $f(x) = \sqrt{x+1}$

3.  $I = ]-1; +\infty[ : F(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$   
 $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right)$

4.  $I = ]0; +\infty[ : F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$   
 $f(x) = \cos x - x \sin x$

5.  $I = \mathbb{R} : F(x) = x \cos x$

مجموعة الدوال الأصلية - الشروط الأولية

2  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$f(x) = 2 \sin 2x$ . عين، من بين الدوال التالية، دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

$G : x \mapsto \sin 2x$  ;  $F : x \mapsto 2 \sin^2 x$

$L : x \mapsto 7 - \cos 2x$  ;  $H : x \mapsto 1 + \cos^2 x$

3 أوجد الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $I$

حيث  $f(x_0) = y_0$  في الحالات التالية :

1.  $I = \mathbb{R} : f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$   
 $y_0 = 0 : x_0 = 1$

2.  $I = \mathbb{R} : f(x) = -2 \sin 2x$   
 $y_0 = 1 : x_0 = \frac{\pi}{4}$

3.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \cos 3x$   
 $y_0 = 0 : x_0 = \frac{\pi}{2}$

4.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$   
 $y_0 = 1 : x_0 = 1$

## تمارين و مسائل

5.  $I = ]0; +\infty[$  :  $f(x) = \frac{-3}{x^3} + \cos x$
6.  $I = ]0; +\infty[$  :  $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} - x - 2$
7.  $I = \mathbb{R}$  :  $f(x) = \sin 2x + \cos(3x + \frac{\pi}{6})$

### مسائل

**9**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي :  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{4 + \sin x}}$

1. عين الدالة الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  والتي تأخذ القيمة 4 عند العدد 0.
2. عين كل الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

**10**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}_+^*$

كما يلي :  $f(x) = \frac{2x^3 + 27}{2x^2}$

1. بين أنه يوجد عدنان حقيقيان  $a$  و  $b$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. عين كل الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ .
3. عين الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  التي تأخذ القيمة 1 عند العدد 1.

**11**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي :  $f(x) = 3x^2(x^2 + 1) + 2x(x^3 + 1)$

1. عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .
2. ما هي الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  التي تنعدم عند العدد 0؟

**12** عين الدوال الأصلية للدالتين  $f$  و  $g$

المعرفتين على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$g(x) = \sin^3 x$  و  $f(x) = \cos^3 x$

### تعيين دوال أصلية

**5** عين الدوال الأصلية لكل دالة  $f$  من الدوال التالية المعرفة على المجال  $I$ .

1.  $I = \mathbb{R}$  :  $f(x) = \cos x \sin^3 x$
2.  $I = \mathbb{R}$  :  $f(x) = \sin x \cos^2 x$
3.  $I = \mathbb{R}$  :  $f(x) = \cos x \sin^2 x$
4.  $I = ]-\infty; -5[$  :  $f(x) = \frac{5}{(x+5)^5}$
5.  $I = ]0; +\infty[$  :  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x}$
6.  $I = ]-1; +\infty[$  :  $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^3)^2}$
7.  $I = \mathbb{R}$  :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

**6**  $f$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$

كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 - 1)^2}$

و  $F$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$

كما يلي :  $F(x) = \frac{-x-2}{x^2-1}$

برهن أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$ .

**7**  $f$  و  $F$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$f(x) = -3x^2 + 4x + 1$

$F(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 1$

1. برهن أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .
2. عين كل الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

**8** عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

في كل حالة من الحالات التالية :

1.  $I = \mathbb{R}$  :  $f(x) = -x + 3$
2.  $I = \mathbb{R}$  :  $f(x) = x^2 + x$
3.  $I = \mathbb{R}$  :  $f(x) = 2x^3 - x + 1$
4.  $I = ]0; +\infty[$  :  $f(x) = \frac{2}{x^3}$

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation



### 1. تعريف الدالة الأسية

الدالة الأسية، و يرمز لها  $\exp$ ، هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية  $y' = y$  الذي يحقق  $\exp(0) = 1$   
الدالة الأسية معرفة على  $\mathbb{R}$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp'(x) = \exp(x)$  و  $\exp(0) = 1$

### 2. خواص

- خاصية 1: الدالة الأسية موجبة تماما على  $\mathbb{R}$ . (من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp(x) > 0$ )
- خاصية 2: الدالة الأسية متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ . (من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp'(x) > 0$ )
- خاصية 3: الدالة الأسية مستمرة على  $\mathbb{R}$ . (الدالة  $\exp$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  كونها حل للمعادلة التفاضلية  $y' = y$ ).

### 3. مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  :  $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

### 4. نتائج

- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  :  $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  و من أجل كل عدد صحيح  $n$  :  $[\exp(x)]^n = \exp(nx)$ .

### 5. الترميز

نضع من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp(x) = e^x$   
إذن الدالة  $\exp$  تكون معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $\exp(x) = e^x$ .

### 6. استعمال الترميز

باستعمال الترميز  $e^x$ ، نكتب :  $e^0 = 1$  و  $e^1 = e$  (  $e$  هو عدد أولر (Euler) حيث  $e = 2,718 \dots$  )  
باستعمال الترميز  $e^x$ ، نكتب أيضا :

- من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  :  $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  :  $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  و من أجل كل عدد صحيح  $n$  :  $(e^x)^n = e^{nx}$

### 7. دراسة الدالة $\exp$

- الدالة  $\exp$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp(x) = e^x$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .
- الدالة  $\exp$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $(e^x)' = e^x$ .
- الدالة  $\exp$  موجبة تماما على  $\mathbb{R}$  ( أي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^x > 0$  ).

الدالة  $\exp$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  (من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $(e^x)' > 0$ ).

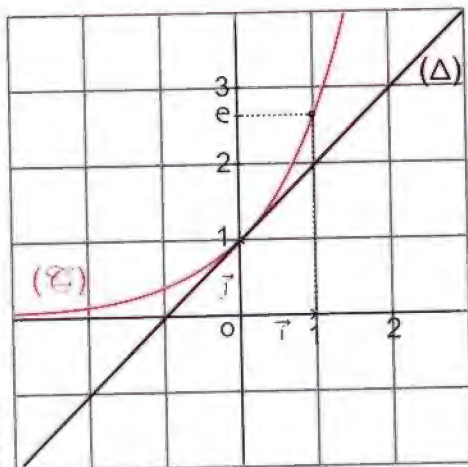
$x$	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp(x)$	0	$+\infty$

الدالة  $\exp$  مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

لأنها قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

جدول التغيرات الدالة  $\exp$  يكون كما يلي :

التمثيل البياني



ليكن  $(E)$  المنحنى الممثل للدالة  $\exp$  في المستوي

النسب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(E)$  عند النقطة

التي فاصلتها 0 هي :  $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$

لدينا  $\exp(0) = e^0 = 1$  و  $\exp'(0) = e^0 = 1$

إذن  $(\Delta) : y = x + 1$

محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(E)$  بجوار  $-\infty$ .

المنحنى  $(E)$  يقبل فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب بجوار  $+\infty$ .

## 8. اشتقاق الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$

إذا كانت الدالة  $x \mapsto u(x)$  قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فإن الدالة  $x \mapsto e^{u(x)}$

قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $[e^{u(x)}]' = u'(x) e^{u(x)}$ .

## 9. النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

## 10. خاصيتان

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $x'$  :  $e^x = e^{x'}$  إذا وفقط إذا كان  $x = x'$ .

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $x'$  :  $e^x < e^{x'}$  إذا وفقط إذا كان  $x < x'$ .

**ملاحظة :** يسمح تطبيق الخاصيتين السابقتين بحل معادلات و متراجحات في  $\mathbb{R}$ .

## 11. المعادلة التفاضلية $y' = y$

حلول المعادلة التفاضلية  $y' = y$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي :  $f(x) = k e^x$  حيث  $k$  عدد حقيقي ثابت.

تمرين 1

1. احسب العدد  $\exp[(0,5)]^2$  بدلالة  $\exp(1)$ . استنتج قيمة  $\exp(0,5)$ .
2. عبر بدلالة  $\exp(1)$  عن الأعداد التالية :  $\exp(-2)$  :  $\exp(2 - \sqrt{2}) \times \exp(1 + \sqrt{2})$  :  $\frac{\exp(3) \times \exp(6)}{[\exp(4)]^2}$  :  $[\exp(2)]^3$  :  $\frac{\exp(0,5 + x)}{\exp(1 + x)}$

حل

1. حساب العدد  $[\exp(0,5)]^2$  بدلالة  $\exp(1)$ .  
 لدينا  $[\exp(0,5)]^2 = \exp(0,5) \times \exp(0,5)$   
 $= \exp(0,5 + 0,5) = \exp(1)$   
 إذن  $[\exp(0,5)]^2 = \exp(1)$   
 . استنتاج قيمة  $\exp(0,5)$ .  
 لدينا  $[\exp(0,5)]^2 = \exp(1)$  و  $\exp(1) > 0$  إذن  $\exp(0,5) = \sqrt{\exp(1)}$ .
2. التعبير عن أعداد بدلالة  $\exp(1)$ .  
 . لدينا  $\exp(-2) = \exp(0 - 2)$   
 $= \frac{\exp(0)}{\exp(2)} = \frac{1}{\exp(2)}$   
 ونعلم أن  $\exp(2) = \exp(2 \times 1)$   
 $= [\exp(1)]^2$   
 إذن  $\exp(-2) = \frac{1}{[\exp(1)]^2}$  أو أيضا  $\exp(-2) = [\exp(1)]^{-2}$   
 . لدينا  $\exp(2 - \sqrt{2}) \times \exp(1 + \sqrt{2}) = \exp(2 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2})$   
 $= \exp(3)$   
 $= [\exp(1)]^3$   
 إذن  $\exp(2 - \sqrt{2}) \times \exp(1 + \sqrt{2}) = [\exp(1)]^3$   
 . لدينا  $\frac{\exp(0,5 + x)}{\exp(1 + x)} = \exp(0,5 + x - 1 - x)$   
 $= \exp(0,5 - 1)$   
 $= \exp(-0,5)$   
 $= \frac{1}{\exp(0,5)} = \frac{1}{\sqrt{\exp(1)}}$   
 إذن  $\frac{\exp(0,5 + x)}{\exp(1 + x)} = \frac{1}{\sqrt{\exp(1)}}$



$$\begin{aligned}
 [\exp(2)]^3 &= [\exp(1)^2]^3 && \text{لدينا} \\
 &= [\exp(1)]^6 \\
 [\exp(2)]^3 &= [\exp(1)]^6 && \text{إذن} \\
 \frac{\exp(3) \times \exp(6)}{[\exp(4)]^2} &= \frac{\exp(3+6)}{\exp(2 \times 4)} = \frac{\exp(9)}{\exp(8)} && \text{لدينا} \\
 &= \exp(9-8) = \exp(1) && \text{لدينا} \\
 \frac{\exp(3) \times \exp(6)}{[\exp(4)]^2} &= \exp(1) && \text{إذن}
 \end{aligned}$$

## 2 استعمال الترميز $e^x$

### تمرين 2

بسط العبارات التالية :

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 ; \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 ; 3e^{2x}(-2e^{-x+1}) ; \frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} ; \frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}}$$

$$\left(\frac{e^{-x+1}}{e^x - e^{-x}}\right) \times \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right) ; \left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}\right) \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}\right) ; e^{-10x} \times (e^{-x+1})^2 \times (e^{3x})^3$$

حل

$$\frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}} = \frac{2e^{2+1}}{e^{\frac{1}{2}}} = 2e^3 \times e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{3-\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{5}{2}} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}} = 2e^{\frac{5}{2}} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} = \frac{3e^{\frac{1}{2}}}{e^{3-1}} = \frac{3e^{\frac{1}{2}}}{e^2} = 3e^{\frac{1}{2}-2} = 3e^{-\frac{3}{2}} \quad \text{لدينا}$$

$$= 3e^{\frac{1}{2}-2} = 3e^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{e^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} = 3e^{-\frac{3}{2}} \quad \text{إذن}$$

$$3e^{2x}(-2e^{-x+1}) = 3(-2)e^{2x} \times e^{-x+1} = -6e^{2x-x+1} = -6e^{x+1} \quad \text{لدينا}$$

$$3e^{2x}(-2e^{-x+1}) = -6e^{x+1} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2e^0 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4}$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} \quad \text{لدينا}$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} \quad \text{إذن}$$

$$e^{-10x} \times (e^{-x+1})^2 \times (e^{3x})^3 = e^{-10x} \times e^{2(-x+1)} \times e^{3(3x)} = e^{-10x} \times e^{-2x+2} \times e^{9x} . \quad \text{لدينا}$$

$$= e^{-10x-2x+2+9x} = e^{-3x+2}$$

$$e^{-10x} \times (e^{-x+1})^2 \times (e^{3x})^3 = e^{-3x+2} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}\right) \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}\right) = \frac{(e^{4x})^2 - (e^{-4x})^2}{4} = \frac{e^{2(4x)} - e^{2(-4x)}}{4} = \frac{e^{8x} - e^{-8x}}{4} = \frac{e^{8x} - \frac{1}{e^{8x}}}{4} \quad \text{لدينا}$$

$$\left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}\right) \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}\right) = \frac{e^{8x} - \frac{1}{e^{8x}}}{4} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{e^{-x+1}}{e^x - e^{-x}}\right) \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right) = \frac{e^{-x} \times e(e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^x + \frac{1}{e^x})(e^x + 1)}$$

$$= \frac{e^{-x} \times e \times (e^x - 1)}{\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)} = \frac{e^{-x} \times e \times (e^x - 1) \times e^x}{(e^{2x} - 1)(e^x + 1)}$$

$$= \frac{e^{-x} \times e^x \times e}{e^x + 1} = \frac{e^{-x+x} \times e}{e^x + 1} = \frac{e^0 \times e}{e^x + 1} = \frac{e}{e^x + 1}$$

$$\left(\frac{e^{-x+1}}{e^x - e^{-x}}\right) \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right) = \frac{e}{e^x + 1} \quad \text{إذن}$$

### 3 حساب نهايات

#### تمارين 1

احسب النهاية عند  $-\infty$  للدالة  $f$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = (2x - 3)e^x \quad .2 \quad f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 3} \quad .1$$

$$f(x) = \frac{e^{x+1} + \sqrt{e}}{1 - e^x} \quad .4 \quad f(x) = 3e^{2x} - e^x + 4 \quad .3$$

حل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x + 1}{e^x - 3}\right) \quad \text{لدينا} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 3) = -3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x + 1) = 1 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{3} \quad \text{أي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x + 1}{e^x - 3}\right) = -\frac{1}{3} \quad \text{وبالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x = 3 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x e^x = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{بما أن} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{وبالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3) e^x = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^{2x} - e^x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^{2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x + 4) \quad \text{لدينا} \quad .3$$

$$= 0 + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 \quad \text{وبالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{2x} - e^x + 4) = 4 \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{x+1} + \sqrt{e}}{1 - e^x} \right) && \text{لدينا 4} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) &= 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \times e) = 0 && \text{لدينا} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{x+1} + \sqrt{e}}{1 - e^x} \right) &= \frac{\sqrt{e}}{1} = \sqrt{e} && \text{إذن} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \sqrt{e} && \text{و بالتالي} \end{aligned}$$

## تمرين 2

احسب النهاية عند  $+\infty$  للدالة  $f$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x \quad \cdot 2 \quad f(x) = e^{2x} - x^2 \quad \cdot 1$$

$$f(x) = e^{3x+1} - 3x \quad \cdot 4 \quad f(x) = (3x^2 - 1)e^x \quad \cdot 3$$

**حل**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{e^{2x}}{x^2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ \left( \frac{e^x}{x} \right)^2 - 1 \right] \quad \text{لدينا 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{e^x}{x} \right)^2 - 1 \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و بالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ \left( \frac{e^x}{x} \right)^2 - 1 \right] = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) \quad \text{لدينا 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x) = +\infty \quad \text{و بالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ينتج أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 1)e^x = +\infty \quad \text{لدينا 3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 1) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و بالتالي}$$

$$e^{3x+1} - 3x = e^{3x} \times e - 3x = 3x \left( e^{\frac{e^{3x}}{3x}} - 1 \right) \quad \text{لدينا 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{\frac{e^{3x}}{3x}} - 1 \right) = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x+1} - 3x) = +\infty \quad \text{و بالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x \left( e^{\frac{e^{3x}}{3x}} - 1 \right) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ينتج أن}$$



4 تعيين دوال مشتقة

تمرين

عين المجموعة التي تقبل عليها الدالة  $f$  الإشتقاق ثم عين الدالة المشتقة  $f'$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x + 1}{x} \cdot 2 & f(x) &= xe^x + x^2 \cdot 1 \\ f(x) &= \frac{e^{2x}}{2x-1} \cdot 4 & f(x) &= (2x-3)e^{3x-1} \cdot 3 \end{aligned}$$

حل

$$f(x) = xe^x + x^2 \cdot 1$$

الدالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + xe^x + 2x & \text{و من أجل كل عدد حقيقي } x \\ &= (x+1)e^x + 2x \end{aligned}$$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = (x+1)e^x + 2x$

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{x} \cdot 2$$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  وقابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x) - (e^x + 1)}{x^2} & \text{و من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ غير منعدم} \\ &= \frac{(x-1)e^x - 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x - 1}{x^2} \quad \text{و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ غير منعدم}$$

$$f(x) = (2x-3)e^{3x-1} \cdot 3$$

الدالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{3x-1} + (2x-3) \times 3e^{3x-1} & \text{و من أجل كل عدد حقيقي } x \\ &= (2+6x-9)e^{3x-1} = (6x-7)e^{3x-1} \end{aligned}$$

$$f'(x) = (6x-7)e^{3x-1} \quad \text{و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي } x$$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{2x-1} \cdot 4$$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$  وقابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$  و  $]-\infty; \frac{1}{2}[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^{2x}(2x-1) - 2e^{2x}}{(2x-1)^2} & \text{و من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن } \frac{1}{2} \\ &= \frac{4(x-1)e^{2x}}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{4(x-1)e^{2x}}{(2x-1)^2} \quad \text{و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن } \frac{1}{2}$$

## تمرين 1

حل في  $\mathbb{R}$  كل معادلة من المعادلات التالية :

$$e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0 \quad ; \quad 3e^{2x} - e^x - 1 = 0 \quad ; \quad e^{x^2} = e \quad ; \quad e^{2x} - e^x = 0 \quad ; \quad e^{3x} = 1$$

حل

1. حل المعادلة  $e^{3x} = 1$

لدينا  $e^{3x} = 1$  يعني  $e^{3x} = e^0$  أي  $3x = 0$

وبالتالي  $x = 0$ . ينتج أن المعادلة  $e^{3x} = 1$  تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$  وهو 0.

2. حل المعادلة  $e^{2x} - e^x = 0$

لدينا  $e^{2x} - e^x = 0$  يعني  $e^{2x} = e^x$  أي  $2x = x$  وبالتالي  $x = 0$ .

ينتج أن المعادلة  $e^{2x} - e^x = 0$  تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$  وهو 0.

3. حل المعادلة  $e^{x^2} = e$

لدينا  $e^{x^2} = e$  يعني  $x^2 = 1$  أي  $(x-1)(x+1) = 0$ . وبالتالي  $x = 1$  و  $x = -1$ .

ينتج أن المعادلة  $e^{2x} = e$  تقبل حلين مختلفين في  $\mathbb{R}$  هما 1 و -1.

4. حل المعادلة  $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$  ... (1) نضع  $e^x = x$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 = 0 \\ e^x = x \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} 3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0 \\ e^x = x \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} (3x+1)(x-1) = 0 \\ e^x = x \end{cases}$$

إذن ( $x = 1$  أو  $x = -\frac{1}{3}$ ) و  $e^x = x$ . ينتج أن  $e^x = 1$  أو  $e^x = -\frac{1}{3}$ .

لدينا  $e^x = 1$  إذن  $x = 0$ .

المعادلة  $e^x = -\frac{1}{3}$  لا تقبل حلا في  $\mathbb{R}$  (لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $e^x > 0$ )

وبالتالي  $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$  تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$  وهو 0.

5. حل المعادلة  $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$

لدينا  $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$  يعني  $e^{4+x^2} = e^{-4x}$  أي  $4 + x^2 = -4x$

أي  $x^2 + 4x + 4 = 0$  أي  $(x+2)^2 = 0$  إذن  $x = -2$ .

ينتج أن المعادلة  $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$  تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$  وهو -2.

## تمرين 2

حل في  $\mathbb{R}$  كل متراجحة من المتراجحات التالية :

$$e^{x^2} e^x < (e^2)^3 \quad ; \quad e^{1+x^2} \leq e^{2x} \quad ; \quad e^{-2x} \geq 1$$

حل

1. حل المتراجحة  $e^{-2x} \geq 1$  في  $\mathbb{R}$ .

لدينا  $e^{-2x} \geq 1$  يعني  $e^{-2x} \geq e^0$  أي  $-2x \geq 0$  إذن  $x \leq 0$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة  $e^{-2x} \geq 1$  هي  $]-\infty; 0]$ .

2. حل المتراجحة  $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$  في  $\mathbb{R}$ .

لدينا  $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$  يعني  $1+x^2 \leq 2x$  أي  $x^2 - 2x + 1 \leq 0$  أي  $(x-1)^2 \leq 0$

إذن  $x = 1$ .

إذن المتراجحة  $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$  تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$  هو 1.

3. حل المتراجحة  $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$  في  $\mathbb{R}$ .

لدينا  $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$  يعني  $e^{x^2+x} < e^6$  أي  $x^2 + x < 6$  أي  $x^2 + x - 6 < 0$ .

لدينا  $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

إذن  $x^2 + x - 6 < 0$  يعني  $(x-2)(x+3) < 0$

و بالتالي  $x \in ]-3; 2[$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة  $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$  هي  $]-3; 2[$ .



- $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x - 2 - e^{-x}$
- (E) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
1. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
  2. استنتج أن المنحنى (E) يقبل مستقيما مقاربا  $(\Delta)$  بجوار  $+\infty$ .
  - حدد الوضع النسبي للمنحنى (E) و المستقيم  $(\Delta)$ .
  3. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = e^{-x}(xe^x - 1) - 2$
  - استنتج  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
  - ادرس سلوك المنحنى (E) الفروع اللانهائية للمنحنى (E) بجوار  $-\infty$ .
  4. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
  5. اثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  حيث  $2 < x_0 < 3$ .
  6. ارسم المنحنى (E).
  7. احسب  $A(\lambda)$  مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (E) و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = \lambda$  و  $x = 3$  :  $\lambda > 3$ .
  - ما هي نهاية  $A(\lambda)$  لما يؤول  $\lambda$  إلى  $+\infty$  ؟

حل

1. حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$ . إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
2. استنتج أن المنحنى (E) يقبل مستقيما مقاربا  $(\Delta)$ .
- لدينا  $f(x) = ax + b + \phi(x)$  حيث  $a = 1$ ,  $b = -2$ , و  $\phi(x) = e^{-x}$ .
- بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$  فإن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x - 2$  هو المستقيم المقارب للمنحنى (E) بجوار  $+\infty$ .
3. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^{-x}(xe^x - 1) - 2 = xe^{-x}e^x - e^{-x} - 2$   
 $= x - 2 - e^{-x} = f(x)$
- إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = e^{-x}(xe^x - 1) - 2$
- لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(xe^x - 1) - 2 = -\infty$
- ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (E).

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\right)$

## تمارين و حلول نموذجية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{إذن}$$

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع مكافئ بجوار  $-\infty$ .

4. دراسة تغيرات الدالة  $f$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = 1 + e^{-x}$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^{-x} > 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) > 0$ .

ينتج أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

5. إثبات أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  حيث  $2 < x_0 < 3$ .

الدالة  $f$  معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[2; 3]$ .

لدينا  $f(2) = -\frac{1}{e^2}$  : أي  $f(2) < 0$

و  $f(3) = 1 - \frac{1}{e^3}$  : أي  $f(3) > 0$

وبالتالي  $f(2) \cdot f(3) < 0$

إذن المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $x_0$  حيث  $2 < x_0 < 3$ .

6. رسم المنحنى  $(\mathcal{C})$ .

7. حساب المساحة  $A(\lambda)$ .

لدينا  $A(\lambda) = \int_3^\lambda [(x-2) - f(x)] dx$

$$= \int_3^\lambda e^{-x} dx$$

الدالة  $e^{-x} \mapsto x$  هي دالة أصلية للدالة  $e^{-x} \mapsto x$  على المجال  $[3; \lambda]$  حيث  $\lambda > 3$ .

$$A(\lambda) = [-e^{-x}]_3^\lambda \quad \text{ينتج أن}$$

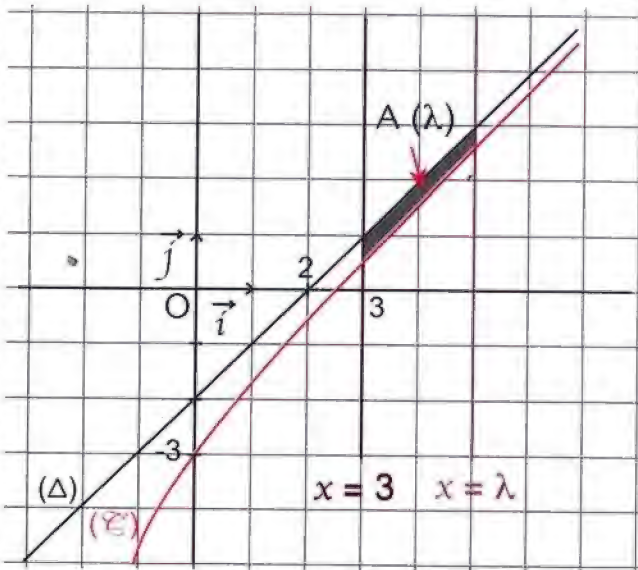
$$= -e^{-\lambda} + e^{-3}$$

و بالتالي  $A(\lambda) = -e^{-\lambda} + \frac{1}{e^3}$  (وحدة المساحات).

حساب نهاية  $A(\lambda)$  لما تؤول  $\lambda$  إلى  $+\infty$ .

لدينا  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (-e^{-\lambda} + \frac{1}{e^3}) = \frac{1}{e^3}$  لأن  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} = 0$

و بالتالي  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \frac{1}{e^3}$ .



## تمارين و مسائل

### إستعمال الترميز $e^x$

#### 1 بسط العبارات التالية :

$$(e^{3x})^2 ; e^{1-x} e^{3x+3} ; e^x e^{-2x} ; e^{2x} e^{3x}$$

$$\frac{e^{-0,2}}{e^{0,2}} ; \frac{e^5}{e^2} ; e^{\frac{1}{2}} e^{-2} ; (e^x)^{-2}$$

#### 2 عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث من أجل

$$\frac{e^x + 1}{2e^x + 1} = a + \frac{be^x}{2e^x + 1} ; x \text{ كل عدد حقيقي}$$

#### 3 عين الأعداد الحقيقية $a, b$ و $c$ بحيث من

$$\frac{e^{2x}}{e^x + 4} = ae^x + b + \frac{ce^x}{e^x + 4}, x \text{ كل عدد حقيقي}$$

### حساب نهايات

#### 4 عين النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) ; \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x + 1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x (e^{\frac{1}{x}} - 1) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + x - 5)e^x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (2xe + 3 - 5e^x)$$

### تعيين دوال مشتقة

#### 5 في كل حالة من الحالات التالية، عين مجموعة

تعريف الدالة  $f$  و دالتها المشتقة  $f'$ .

$$f(x) = e^{3x+1} ; f(x) = 2e^x$$

$$f(x) = e^{\sin 2x} ; f(x) = e^{3-x}$$

$$f(x) = (3x + 1)e^x ; f(x) = \sqrt{e^x}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} ; f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x}$$

$$f(x) = e^x \sin x ; f(x) = \frac{5e^x - 1}{1 - e^x}$$

$$f(x) = e^{-x} (\cos 3x - \sin 3x)$$

### حل معادلات و متراجحات

#### 6 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات التالية :

$$e^{5x-1} = e^{x^2+5} ; e^{x^2} = e^{25} ; e^x = 1$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 ; e^x + 1 = \frac{2}{e^x} ; e^{\sin x} = e^{\cos x}$$

$$e^x + e^{-x} = 2 ; e^{4x} - e^{2x} = 0$$

$$e^{2x} + 5e^x - 6 = 0 ; e^{2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$$

#### 7 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المتراجحات التالية :

$$e^{2x} - e^x < 0 ; e^{x^2-2} \leq e^{4-x} ; e^x \geq \sqrt{e}$$

$$e^{4x} + 5e^{2x} - 6 \leq 0 ; e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$$

$$e^{2x} > e^{x+1} ; e^{x^2} x e^x < (e^3)^2$$

### حساب دوال أصلية

#### 8 في كل حالة من الحالات التالية، عين دالة

أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ .

$$I = \mathbb{R} ; f(x) = e^{-x}$$

$$I = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{1}{2} e^{3x} - 5e^{2x}$$

$$I = [0 ; +\infty[ ; f(x) = x e^{x^2}$$

$$I = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$I = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 3)^2}$$

#### 9 عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حتى تكون

الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$F(x) = (a \sin x + b \cos x) e^x$$

دالة أصلية للدالة  $f$

$$f(x) = (5 \sin x - \cos x) e^x \text{ حيث}$$

### مسائل

#### 10 $f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

1. حل المعادلة  $f(x) = 0$  في  $\mathbb{R}$ .

2. عين النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

3. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

4. ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

5. حل بيانيا المعادلة  $f(x) = k$  حيث  $k$

عدد حقيقي.



## تارين و مسائل

7. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة كما يلي :

$$g(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - f(x)$$

(أ) . حلل العبارة  $e^{2x} - 2e^x + 1$

(ب) . احسب  $g'(x)$  و  $g(0)$  . ادرس تغيرات  $g$  .

(ج) . استنتج الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  و المماس (T) .

8. ارسم (T) و  $(\mathcal{C})$  .

13 (I<sub>n</sub>) متتالية معرفة كما يلي :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

1. احسب I<sub>1</sub> .

2. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

3. احسب I<sub>2</sub> و I<sub>3</sub> .

14  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = xe^{-x} \text{ و } \lambda \text{ عدد حقيقي موجب تماما.}$$

1. ادرس تغيرات الدالة  $f$  .

2. ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

الوحدة 4 cm .

3. باستعمال المكاملة بالتجربة، احسب المساحة

$A(\lambda)$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$

و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$x = \lambda$  و  $x = 0$  على الترتيب.

ادرس نهاية  $A(\lambda)$  عندما يؤول  $\lambda$  إلى  $+\infty$  .

15 1. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$g(x) = e^x - x + 1 \text{ كما يلي :}$$

- ادرس تغيرات الدالة  $g$  .

- احسب  $g(0)$  .

2. استنتج أن العبارة  $\frac{e^x}{e^x - x}$  موجبة من أجل

كل عدد حقيقي  $x$  .

6.  $\lambda$  عدد حقيقي موجب تماما .

أحسب المساحة  $A(\lambda)$  للحيز المستوي المحدود

بالمنحنى  $(\mathcal{C})$  و محور الفواصل و المستقيمين ذوي

المعادلتين  $x = \lambda$  و  $x = 0$  حيث  $\lambda > 0$  .

احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda)$  .

11 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ :

$$f(x) = 2e^{2x} + e^x - 3$$

ليكن  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

1. تحقق من صحة المعلومات الواردة في الجدول

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-3	0	$+\infty$

التالي :

(نظم المعلومات المقدمة وفق ترتيب منطقي).

2. عيّن معادلة للمماس (T) للمنحنى عند النقطة

ذات الفاصلة 0 .

3. ادرس إشارة العبارة  $f(x) - 5x$  على  $\mathbb{R}$  .

استنتج الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  و المماس (T) .

12 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

و  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

1. عيّن مجموعة تعريف الدالة  $f$  .

2. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

3. بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

4. أثبت أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  .

5. بيّن أن النقطة  $A(0; \frac{1}{2})$  مركز تناظر  $(\mathcal{C})$  .

6. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى  $(\mathcal{C})$  عند

النقطة A .

6. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (E) عند النقطة التي فاصلتها 0.

7. ادرس الوضع النسبي للمنحنى (E) والمماس (T).

8. ارسم المماس (T) والمنحنى (E).

17. المستوي منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . الوحدة 1 cm.

لتكن  $f$  الدالة المعرفة بـ :  $f(x) = (2 + \cos x) e^{1-x}$

و (E) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

1. عين مجموعة تعريف  $f$ .

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f(x) > 0$

3. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$$

استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$2 + \cos x + \sin x > 0$$

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$$

استنتج نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ .

5. أثبت أن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .

أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$ .

6. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (E).

7. بين أن المعادلة  $f(x) = 3$  تقبل حلا واحدا  $\alpha$

حيث  $0 < \alpha < \pi$ .

8. ارسم المنحنى (E).

3. تعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$$

- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) > 0$

- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$$

استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

5. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

6. (E) هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (E).

- ارسم (E) في المعلم السابق.

16. تعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

ليكن (E) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

الوحدة 1 cm.

1. عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

3. بين أن  $f(x)$  يكتب على الشكل

$$f(x) = a + \frac{b}{e^x + 1}$$

يطلب تعيينهما.

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

و استنتج أن الدالة  $f$  فردية.

5. أثبت أن المنحنى (E) يقبل نقطة انعطاف.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation



### 1 - الدالة «لوغاريتم نيبيري»

#### 1. مبرهنة وتعريف

- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما، المعادلة  $e^t = x$  تقبل حلا وحيدا  $t$  يرمز له  $\ln x$ .
- العدد الحقيقي  $\ln x$  يقرأ اللوغاريتم النيبيري لـ  $x$ .
- الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  العدد  $\ln x$  تسمى الدالة «لوغاريتم نيبيري» ويرمز لها بـ  $\ln$ .

#### ملاحظات :

1. الدالة  $\ln : x \mapsto \ln x$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  و تأخذ قيمها في  $\mathbb{R}$ .

2. المعادلة  $e^t = x$  تقبل حلا وحيدا في  $\mathbb{R}$  ؛ من أجل كل عدد حقيقي

موجب تماما  $x$  (لأن الدالة الأسية  $x \mapsto e^x$

معرفة، مستمرة و متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ ).

3. حل المعادلة  $e^x = y_0$ ، حيث  $y_0$  عدد حقيقي موجب تماما

هو العدد الحقيقي  $x$  فاصلة النقطة من المنحني الممثل للدالة

$x \mapsto e^x$  ذات الترتيب  $y_0$ .

نكتب :  $x = \ln y_0$

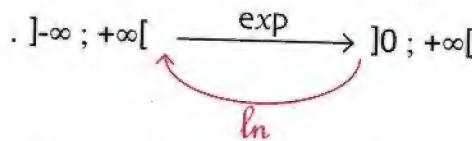
4. من أجل كل عدد حقيقي  $y$  موجب تماما، من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$e^x = y$  يكافئ  $x = \ln y$

5.  $e^0 = 1$  يعني  $\ln 1 = 0$  ؛  $e^1 = e$  يعني  $\ln e = 1$

6. التمثيل الموالي يسمح بالقول أن الدالة

$\ln : x \mapsto \ln x$  هي الدالة العكسية للدالة  $\exp : x \mapsto e^x$ .



7. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما،  $e^{\ln x} = x$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ؛  $\ln e^x = x$ .

#### 2. مبرهنة

الدالة «لوغاريتم النيبيري»  $\ln$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$

موجب تماما،  $\ln' x = \frac{1}{x}$ .

### 3. خواص

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  موجبين تماما و من أجل كل عدد ناطق  $n$ ,

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad \left| \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y\right.$$

$$\ln(x^n) = n \ln x \quad \left| \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x\right.$$

**حالة خاصة:** من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما،  $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

### 4. دراسة الدالة «اللوغاريتم النيبيري»

• الدالة  $\ln$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  و تأخذ قيمها في المجال  $]-\infty; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

• الدالة  $\ln$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

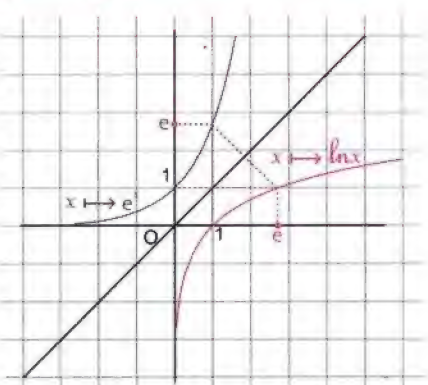
• من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  :  $\ln' x = \frac{1}{x}$

• الدالة  $\ln$  مستمرة على المجال  $]0; +\infty[$  (لأنها قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$ ).

• الدالة  $\ln$  متزايدة تماما على المجال  $]0; +\infty[$ .

• مما سبق يكون جدول تغيرات الدالة  $\ln$  كما يلي :

$x$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$



• المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (أي محور الترتيب)

هو مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة  $\ln$ .

• المنحنى الممثل للدالة  $\ln$  يقبل فرع قطع مكافئ بجوار  $+\infty$ .

• في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$(0; \vec{i}, \vec{j})$  المنحنيان الممثلان للدالتين  $\ln$  و  $\exp$

متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة  $y = x$ .

### 5. نتيجتان

من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  موجبين تماما،

$\ln a = \ln b$  إذا و فقط إذا كان  $a = b$ .

$\ln a < \ln b$  إذا و فقط إذا كان  $a < b$ .

تستعمل هاتان النتيجتان لحل  
معادلات و مترجمات.

6. اشتقاق الدالة  $x \mapsto \ln|u(x)|$  مبرهنة

$u$  دالة معرفة على مجال  $I$ .

إذا كانت الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولا تنعدم على  $I$  فإن الدالة  $x \mapsto \ln|u(x)|$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$ ،

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

7. نهايات شهيرة

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

II - دوال لوغاريتم ودوال أسية أخرى

1. الدالة «اللوغاريتم العشري»

تعريف

الدالة «اللوغاريتم العشري» يرمز لها  $\log$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظات

$$\ln 10 \approx 2,30 \quad ; \quad \log 10 = 1 \quad ; \quad \log 1 = 0$$

2. الدالة  $\log$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

و دالتها المشتقة معرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي :

$$(\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

3. الدالة  $\log$  لها نفس تغيرات الدالة  $\ln$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

خواص

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  موجبين تماما و من أجل كل عدد ناطق  $n$ ,

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log(x^n) = n \log x$$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$$

نتيجة : من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  موجبين تماما،

$$a = b \quad \text{يكافئ} \quad \log a = \log b$$

$$a < b \quad \text{يكافئ} \quad \log a < \log b$$



## 2. الدوال الأسية ذات الأساس a

### تعريف

a عدد حقيقي موجب تماما حيث  $a \neq 1$ .  
نسمي الدالة الأسية ذات الأساس a، يرمز لها  $\exp_a$ ، الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي  $\exp_a(x) = a^x$ .

### ملاحظة

من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما حيث  $a \neq 1$ ،  $a^x = e^{x \ln a}$ .

### خواص

من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما حيث  $a \neq 1$  و  $b \neq 1$  و من أجل كل عددين حقيقيين x و y،

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

## 3. تغيرات الدالة $\exp_a$

1. إذا كان  $0 < a < 1$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

إذا كان  $a > 1$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

2. الدالة  $\exp_a$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

و من أجل كل عدد حقيقي x :  $\exp'_a(x) = (\ln a) a^x$

3. إذا كان  $0 < a < 1$  فإن الدالة  $\exp_a$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .

إذا كان  $a > 1$  فإن الدالة  $\exp_a$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

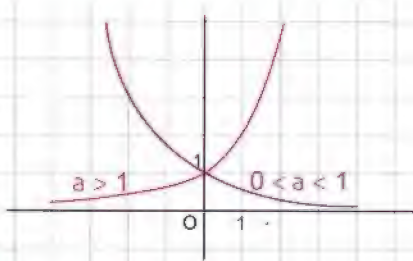
### 4. جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$		+
$a^x$	0	$+\infty$

$a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$		-
$a^x$	$+\infty$	0

$0 < a < 1$



5. عندما a يسمح  $\mathbb{R}_+^*$  و  $a \neq 1$  كل منحنيات

الدالة  $\exp_a$  تشمل النقطة ذات الإحداثيين (0; 1).

محور الفواصل هو مستقيم مقارب أفقي لهذه المنحنيات.

كل هذه المنحنيات تقبل فرع قطع مكافئ منحاه

هو منحنى محور الترتيب.

### III - الدالة « جذر نوني »

تعريف

$n$  عدد طبيعي أكبر تماما من 1.

نسمي الدالة « جذر نوني » و نرمز لها بـ  $\sqrt[n]{x}$  ، الدالة المعرفة على المجال  $[0 ; +\infty[$  و التي ترفق بكل عدد حقيقي  $x$  موجب ، العدد الموجب  $\sqrt[n]{x}$  حيث  $(\sqrt[n]{x})^n = x$ .

نتيجة

1. من أجل كل عدد حقيقي موجب  $x$  :  $A = \sqrt[n]{x}$  يكافئ  $A^n = x$ .

2. من أجل كل عدد حقيقي موجب  $x$  :  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ .

3. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما :  $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n} \ln x}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ .

### IV - التزايديات المقارنة

نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$  حيث  $n$  عدد طبيعي غير منعدم .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

مبرهنة

$n$  عدد طبيعي غير منعدم .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

نتيجة

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$

### التفسير البياني للتزايديات المقارنة

نرسم المنحنيات المثلة للدوال

$x \mapsto e^x$  :  $x \mapsto \ln x$  :  $x \mapsto x^3$

في نفس المعلم المتعامد  $(\vec{i}, \vec{j})$  ، (الشكل).

نلاحظ أنه يوجد عدد حقيقي موجب تماما  $A$  حيث من أجل

$x > A$  ، يكون  $e^x > x^3 > \ln x$  (بالحاسبة  $A \approx 4,6$ ).

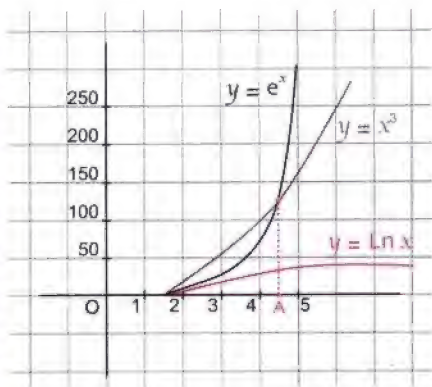
نقول إن الدالة  $x \mapsto e^x$  تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى

الدالة  $x \mapsto x^3$  و الدالة  $x \mapsto x^3$  تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة  $x \mapsto \ln x$  بجوار  $+\infty$ .

بصفة عامة، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر تماما من 1 ، يوجد عدد حقيقي موجب تماما  $A$  حيث

من أجل  $x > A$  ، يكون  $e^x > x^3 > \ln x$  أي الدالة  $x \mapsto e^x$  تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى

الدالة  $x \mapsto x^n$  و الدالة  $x \mapsto x^n$  تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة  $x \mapsto \ln x$  بجوار  $+\infty$ .



1 استعمال خواص الدالة  $\ln$

تمرين

اكتب على أبسط شكل الأعداد التالية :

$$\ln 72 - 2\ln \frac{27}{256} + \ln \sqrt{108} \quad ; \quad \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 8 + 4\ln \sqrt{2} \quad ; \quad \ln 32$$

$$\ln \frac{1}{8} - \ln 0,375 + 2\ln \sqrt{0,5625}$$

حل

1. لدينا  $\ln 32 = 5\ln 2$  إذن  $\ln 32 = \ln 2^5 = 5\ln 2$

2. لدينا  $\ln \sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$  :  $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2$  :  $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

إذن  $\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 8 + 4\ln \sqrt{2} = -\ln 2 + \frac{1}{2} \times 3\ln 2 + 4 \times \frac{1}{2}\ln 2$

$$= -\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 2 + 2\ln 2$$

$$= \left(-1 + \frac{3}{2} + 2\right)\ln 2 = \frac{5}{2}\ln 2$$

ينتج أن  $\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 8 + 4\ln \sqrt{2} = \frac{5}{2}\ln 2$

3. لدينا  $\ln 72 = \ln (9 \times 8) = \ln 9 + \ln 8$   
 $= 2\ln 3 + 3\ln 2$

$$\ln \frac{27}{256} = \ln 27 - \ln 256 = \ln 3^3 - \ln 2^8$$

$$= 3\ln 3 - 8\ln 2$$

$$\ln \sqrt{108} = \frac{1}{2} \ln 108 = \frac{1}{2} \ln 4 \times 27$$

$$= \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 27 = \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3$$

إذن  $\ln 72 - 2\ln \frac{27}{256} + \ln \sqrt{108} = 2\ln 3 + 3\ln 2 - 2(3\ln 3 - 8\ln 2) + \ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3$

$$= 2\ln 3 + 3\ln 2 - 6\ln 3 + 16\ln 2 + \ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3$$

$$= \left(2 - 6 + \frac{3}{2}\right)\ln 3 + (3 + 16 + 1)\ln 2 = -\frac{5}{2}\ln 3 + 20\ln 2$$

إذن  $\ln 72 - 2\ln \frac{27}{256} + \ln \sqrt{108} = -\frac{5}{2}\ln 3 + 20\ln 2$



$$\ln \frac{1}{8} = -\ln 8 = -3\ln 2 \quad \text{4. لدينا}$$

$$\ln 0,375 = \ln \frac{375}{1000} = \ln \frac{3}{8} = \ln 3 - \ln 8 = \ln 3 - 3\ln 2$$

$$2\ln \sqrt{0,5625} = \ln 0,5625 = \ln \frac{5625}{10000} = \ln \frac{5}{16} = \ln 5 - \ln 16 = 2\ln 3 - 4\ln 2$$

$$\ln \frac{1}{8} - \ln 0,375 + 2\ln \sqrt{0,5625} = -3\ln 2 - \ln 3 + 3\ln 2 + 2\ln 3 - 4\ln 2 \quad \text{إذن}$$

$$= -4\ln 2 + \ln 3$$

$$\ln \frac{1}{8} - \ln 0,375 + 2\ln \sqrt{0,5625} = -4\ln 2 + \ln 3 \quad \text{و بالتالي}$$

## 2 حل معادلات ومراجعات

### تمرين 1

حل في  $\mathbb{R}$  كل معادلة من المعادلات التالية

$$\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3) \quad ; \quad \ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2 \quad ; \quad \ln x = 2$$

$$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$$

### حل

$$1. \text{ حل المعادلة } \ln x = 2$$

$\ln x$  معرف إذا كان  $x > 0$ .

$$\text{إذن } \ln x = 2 \text{ يعني } x > 0 \text{ و } \ln x = \ln e^2 \text{ و بالتالي } x = e^2$$

ينتج أن المعادلة  $\ln x = 2$  تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$  هو  $e^2$ .

**طريقة أخرى:** نعلم أن من أجل  $x > 0$  و  $y$  عدد حقيقي،  $y = \ln x$  يكافئ  $x = e^y$

$$\text{لدينا } \ln x = 2 \text{ إذن } x = e^2.$$

$$2. \text{ حل المعادلة } \ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$$

$\ln(x-1)$  معرف إذا كان  $x-1 > 0$  أي  $x > 1$ .

$$\text{إذن } \ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2 \text{ يعني } x > 1 \text{ و } \ln(x-1) = \ln 3^2 - \ln 2^3$$

$$\ln(x-1) = \ln \frac{9}{8} \quad \text{أي } x > 1 \text{ و}$$

$$\text{و بالتالي } x-1 = \frac{9}{8} \quad \text{أي } x = \frac{17}{8}$$

ينتج أن المعادلة  $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$  تقبل حلا واحدا وهو  $\frac{17}{8}$ .

$$3. \text{ حل المعادلة } \ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$$

لحل هذه المعادلة نضع الشرط التالي  $x > 0$  و  $3x+2 > 0$  و  $2x+3 > 0$  أي  $x > 0$ .

$$\text{لدينا } \ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3) \text{ يعني } x > 0 \text{ و } \ln x(3x+2) = \ln(2x+3)$$

$$\text{إذن } x > 0 \text{ و } x(3x+2) = 2x+3$$

$$\text{أي } x > 0 \text{ و } 3x^2 + 2x = 2x + 3$$

$$\text{أي } x > 0 \text{ و } 3x^2 - 3 = 0$$

$$\text{إذن } x > 0 \text{ و } (x=1 \text{ أو } x=-1) \text{ ينتج أن } x=1.$$

و بالتالي المعادلة  $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$  تقبل حلا واحدا هو 1.

$$4. \text{ حل المعادلة } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$$

لحل هذه المعادلة نضع الشرط التالي  $x^2 - 2x - 3 > 0$  و  $x+7 > 0$ .

$$\text{لدينا } x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$\text{إذن } x^2 - 2x - 3 > 0 \text{ إذا و فقط إذا كان } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]3; +\infty[$$

$$\text{و } x+7 > 0 \text{ إذا و فقط إذا كان } x > -7.$$

$$\text{ينتج أن } x \in ]-7; -1[ \cup ]3; +\infty[.$$

$$\text{حل المعادلة } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ في المجموعة } ]-7; -1[ \cup ]3; +\infty[.$$

$$\text{لدينا } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ إذا و فقط إذا كان } x \in ]-7; -1[ \cup ]3; +\infty[$$

$$\text{و } x^2 - 2x - 3 = x+7 \text{ أي } x \in ]-7; -1[ \cup ]3; +\infty[ \text{ و } x^2 - 3x - 10 = 0.$$

$$\text{حل المعادلة } x^2 - 3x - 10 = 0 \text{ في المجموعة } ]-7; -1[ \cup ]3; +\infty[.$$

$$\Delta = 49 ; \Delta > 0 \text{ إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما } x_1 = 5 \text{ و } x_2 = -2.$$

$$\text{لدينا } 5 \text{ و } -2 \text{ ينتميان إلى المجموعة } ]-7; -1[ \cup ]3; +\infty[.$$

$$\text{و بالتالي المعادلة } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ تقبل حلين مختلفين هما } 5 \text{ و } -2.$$

## تمرين 2

حل كل متراجحة من المتراجحات التالية

$$\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0 ; \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0 ; \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$$

1. حل المتراجحة  $\ln(x-1) \geq 0$

لحل المتراجحة  $\ln(x-1) \geq 0$  نضع الشرط التالي  $x-1 > 0$  أي  $x > 1$ .

حل المتراجحة  $\ln(x-1) \geq 0$  في المجال  $]1; +\infty[$ .

لدينا  $\ln(x-1) \geq \ln 1$  يعني  $x > 1$  و  $\ln(x-1) \geq \ln 1$

أي  $x > 1$  و  $x-1 \geq 1$  أي  $x > 1$  و  $x \geq 2$  إذن  $x \geq 2$ .

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(x-1) \geq 0$  هي  $[2; +\infty[$ .

2. حل المتراجحة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$

لحل المتراجحة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$  نضع الشرط التالي  $x \neq -1$  و  $\frac{x-1}{x+1} > 0$ .

أي  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ .

حل في المجموعة  $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$  المتراجحة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ .

لدينا  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$  يعني  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > \ln 1$  أي  $\frac{x-1}{x+1} > 1$ .

أي  $\frac{x-1}{x+1} - 1 > 0$  أي  $\frac{-2}{x+1} > 0$  أي  $\frac{2}{x+1} < 0$ .

إذن  $x+1 < 0$  وبالتالي  $x < -1$ .

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$  هي  $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$ .

3. حل المتراجحة  $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$

لحل المتراجحة  $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$  نضع الشرط التالي  $x+1 > 0$  و  $3-x > 0$ .

أي  $x > -1$  و  $x < 3$  أي  $x \in ]-1; 3[$ .

حل المتراجحة  $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$  في المجال  $]1; 3[$ .

لدينا  $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$  يعني  $\ln(x+1)(3-x) < \ln 1$

إذن  $(x+1)(3-x) < 1$  وبالتالي  $x^2 - 2x - 2 > 0$

أي  $(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3}) > 0$

إذن  $x \in ]-\infty; 1-\sqrt{3}[ \cup ]1+\sqrt{3}; 3[$  و  $x \in ]-1; 3[$  إذن  $x \in ]-1; 1-\sqrt{3}[ \cup ]1+\sqrt{3}; 3[$ .

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$  هي  $]1; 1-\sqrt{3}[ \cup ]1+\sqrt{3}; 3[$ .



4. حل المتراجحة  $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$

لحل المتراجحة  $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$  نضع الشرط التالي  $x^2 - 1 > 0$  و  $4x - 1 > 0$  أي  $x \in ]1; +\infty[$

لحل المتراجحة  $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$  في المجال  $]1; +\infty[$

لدينا  $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$  إذا وفقط إذا كان  $x^2 - 1 \geq 4x - 1$  أي  $x^2 - 4x \geq 0$  إذن  $x(x - 4) > 0$

وبالتالي  $x \geq 4$  أي  $x \in [4; +\infty[$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$  هي  $[4; +\infty[$

### 3 حساب نهايات

#### تمرين

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (\ln x)^2) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + (\ln x)^2)$$

#### حل

1. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x)$

الدالة  $x \mapsto 2x - \ln x$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2 - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{\ln x}{x} \right) = 2 \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = +\infty$$

2. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right)$

$$\text{الدالة } x \mapsto \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \text{ معرفة على المجال } ]-1; 1[$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1+x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{1-x}{1+x} > 0 \quad \text{على المجال } ]-1; 1[$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) = -\infty \quad \text{إذن}$$

3. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (\ln x)^2)$

الدالة  $x \mapsto x^2 + (\ln x)^2$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

و نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (\ln x)^2) = +\infty$

4. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + (\ln x)^2)$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  و نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$  ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + (\ln x)^2) = +\infty$

5. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

الدالة  $x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

إذن توجد حالة عدم التعيين.

نضع  $y = \frac{1}{x}$  عندما  $x \rightarrow -\infty$  :  $y \rightarrow 0$

لدينا  $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+y)}{y}$

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$

6. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

بوضع  $y = \frac{1}{x}$  لدينا  $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+y)}{y}$

و عندما  $x \rightarrow +\infty$  :  $y \rightarrow 0$

إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

## تمرين 1

- $f$  دالة معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = x^2(-1 + 2\ln x)$  إذا كان  $x > 0$  و  $f(0) = 0$
1. هل الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين ؟
2. عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

حل

1. الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[0; +\infty[$ .

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2(-1 + 2\ln x)}{x} \quad \text{لدينا}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما :  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x(-1 + 2\ln x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x(-1 + 2\ln x) \quad \text{لدينا}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (-x + 2x\ln x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{وبالتالي}$$

ينتج أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين و  $f'(0) = 0$ .

2. الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$  ( $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين).

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  :  $f'(x) = 2x(-1 + 2\ln x) + x^2\left(\frac{2}{x}\right)$

$$= -2x + 4x\ln x + 2x$$

$$= 4x\ln x$$

أي من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  :  $f'(x) = 4x\ln x$  و  $f'(0) = 0$ .

إذن الدالة  $f'$  معرفة كما يلي :  $f'(x) = 4x\ln x$  إذا كان  $x > 0$  و  $f'(0) = 0$ .



## تمرين 2

$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{2x})$  : هي الدالة المعروفة كما يلي :

1. عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على مجموعة تعريفها.
3. عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

حل

1. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $1 + e^{2x} > 0$  . إذن الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

2. الدالة  $x \mapsto e^{-x}$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

و الدالة  $x \mapsto \ln(1 + e^{2x})$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  . (اشتقاق دالة مركبة)

إذن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  . (اشتقاق جداء دالتين).

3. تعيين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + e^{-x} \left( \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right)$$

$$= -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

## تمرين 3

$f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$  : هي الدالة المعروفة كما يلي :

1. عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
2. عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

حل

1. الدالة  $f$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $2+x \neq 0$  و  $\frac{2-x}{2+x} > 0$  أي  $x \in ]-2; 2[$

و بالتالي مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي المجال  $] -2 ; 2 [$  .

2. الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $] -2 ; 2 [$  .

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)'}{\frac{2-x}{2+x}} ; \quad x \text{ من المجال } ] -2 ; 2 [$$

$$\left(\frac{2-x}{2+x}\right)' = \frac{-4}{(2+x)^2} ; \quad x \text{ من المجال } ] -2 ; 2 [$$

$$f'(x) = \frac{-4}{4+x^2} ; \quad x \text{ من المجال } ] -2 ; 2 [$$

$$f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} - \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\} \text{ كما يلي : } f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1}$$

1. عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $-\frac{1}{2}$  و  $-1$

$$f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1}$$

2. استنتج الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على المجال  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$  حيث  $F(0) = -1$ .

حل

1. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $\mathbb{R} - \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $-\frac{1}{2}$  و  $-1$

$$a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1} = \frac{a(2x+1)(x+1) + b(x+1) + c(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}$$

$$= \frac{2ax^2 + (3a + b + 2c)x + a + b + c}{2x^2 + 3x + 1}$$

$$\text{إذن } f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1}$$

$$\frac{2ax^2 + (3a + b + 2c)x + a + b + c}{2x^2 + 3x + 1} = \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1} \text{ يعني}$$

$$\text{ينتج أن } 2a = 2 \text{ و } 3a + b + 2c = -1 \text{ و } a + b + c = -2$$

باستعمال طريقة التعويض، ينتج أن  $a = 1$  و  $b = -2$  و  $c = -1$ .

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $-\frac{1}{2}$  و  $-1$  :  $f(x) = 1 - \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1}$

2. تعيين الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على المجال  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$  حيث  $F(0) = -1$

الدالة  $x \mapsto x$  هي دالة أصلية للدالة  $1 \mapsto x$  على  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ .

الدالة  $x \mapsto \ln(2x+1)$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{2}{2x+1}$  على  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ .

الدالة  $x \mapsto \ln(x+1)$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x+1}$  على  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ .

(استعمال المبرهنة حول الدوال الأصلية للدوال من الشكل  $(x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)})$ )

إذن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  هي الدوال

$$d \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad x \mapsto x - \ln(2x+1) - \ln(x+1) + d$$

$$\text{لدينا } F(0) = -1 \quad \text{أي} \quad 0 + d = -1 \quad \text{ينتج أن} \quad d = -1$$

إذن الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  حيث  $F(0) = -1$

$$\text{هي الدالة} \quad x \mapsto x - \ln(2x+1) - \ln(x+1) - 1$$

## 6 استعمال اللوغاريتم العشري والدالة الأسية ذات الأساس $\alpha$

### تمرين 1

بسط الأعداد التالية :

$$\log 16 \quad ; \quad \log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) \quad ; \quad \sqrt[3]{729} \quad ; \quad \sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}}$$

### حل

$$\bullet \text{ لدينا } \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2$$

$$\text{إذن } \log 16 = 4 \log 2$$

$$\bullet \text{ لدينا } \log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) = \log 0,81 + \log 10^{-2} + \log 3^{13}$$

$$= \log \frac{81}{100} - 2 + 13 \log 3$$

$$= \log 81 - \log 100 + (-2) + 13 \log 3$$

$$= 4 \log 3 - 2 - 2 + 13 \log 3$$

$$= -4 + 17 \log 3$$

$$\text{إذن } \log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) = -4 + 17 \log 3$$

$$\bullet \text{ لدينا } \sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^6} = \sqrt{(3^2)^3} = 3^2 = 9$$

$$\bullet \text{ لدينا } \sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^2} \times 5^{\frac{9}{4}}$$

$$= 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{9}{4}} = 5^{\frac{11}{4}}$$

$$\text{إذن } \sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{11}{4}}$$



## تقريين

حل في  $\mathbb{R}$  كل معادلة من المعادلات التالية

$$10^{4x} = 9 \quad ; \quad \log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1) \quad ; \quad \log(3x+4) = 0$$

$$10^x - 2 \times 10^{-x} = 1$$

## حل

• حل المعادلة  $\log(3x+4) = 0$  بوضع الشرط  $3x+4 > 0$  أي  $x \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$ .

$\log(3x+4) = \log 1$  يعني  $x \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$  و  $\log(3x+4) = \log 1$

أي  $x \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$  و  $3x+4 = 1$  إذن  $x = -1$ .

وبالتالي المعادلة  $\log(3x+4) = 0$  تقبل حلا واحدا هو  $-1$ .

• حل المعادلة  $\log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1)$  بوضع الشرط  $2x > 0$  و  $x+1 > 0$  و  $x-1 > 0$  أي  $x > 1$ .

$\log\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \log(x-1)$  و  $x > 1$  يعني  $\log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1)$

ينتج أن  $x > 1$  و  $\frac{2x}{x+1} = x-1$

أي  $x > 1$  و  $x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta' = 2$ . حلا المعادلة  $x^2 - 2x - 1 = 0$  هما  $1 + \sqrt{2}$  و  $1 - \sqrt{2}$ .

إذن المعادلة  $\log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1)$  تقبل حلا واحدا هو  $1 + \sqrt{2}$ .

• حل المعادلة  $10^{4x} = 9$  حيث  $x$  عدد حقيقي.

لدينا  $10^{4x} = 9$  يعني  $\log 10^{4x} = \log 9$

أي  $4x = \log 9$  إذن  $x = \frac{1}{4} \log 9$

وبالتالي المعادلة  $10^{4x} = 9$  تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$  هو  $\frac{1}{4} \log 9$ .

• حل المعادلة  $10^x - 2 \times 10^{-x} = 1$ .

لدينا  $10^x - 2 \times 10^{-x} = 1$  يكافئ  $10^x - 2 \times \frac{1}{10^x} - 1 = 0$

أي  $10^{2x} - 10^x - 2 = 0$  أي  $(10^x)^2 - 10^x - 2 = 0$

بوضع  $t = 10^x$ ، نحل المعادلة  $t^2 - t - 2 = 0$  حيث  $t > 0$ . ينتج أن  $t = 2$ .

لدينا  $t = 2$  و  $t = 10^x$  إذن  $10^x = 2$  وبالتالي  $x = \log 2$ .

ينتج أن المعادلة  $10^x - 2 \times 10^{-x} = 1$  تقبل حلا واحدا هو  $\log 2$ .

$f$  دالة معرفة كما يلي :  $f(x) = -\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$  و  $(\mathcal{E})$  المنحنى الممثل لها في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j}; 0)$  . (الوحدة 2 cm)

1. عين مجموعة التعريف  $E$  للدالة  $f$ .

2. أدرس نهاية الدالة  $f$  عندما يؤول  $x$  إلى  $-1$  بقيم أكبر.

(يمكن كتابة  $f(x)$  على الشكل  $\frac{1}{x+1} \varphi(x)$  .)

3. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

4. عين معادلة للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(\mathcal{E})$  عند النقطة ذات لفاصلة 1.

5. ادرس تغيرات الدالة  $g$  المعرفة كما يلي :  $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \ln 2\right)$  .

استنتج إشارة  $g(x)$  ثم الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{E})$  و المماس  $(T)$ .

6. ارسم المنحنى  $(\mathcal{E})$ .

7. بين أنه يوجد عدنان حقيقيان  $a$  و  $b$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $E$  ،  $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$  .

8. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكامل  $\int_0^1 \ln(1+x) dx$  .

9. احسب المساحة  $\mathcal{A}$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{E})$  و المستقيمت ذات المعادلات

$x=0$  :  $x=1$  :  $y=0$  . عين قيمة  $\mathcal{A}$  بالسنتمترات المربعة.

حل

1. الدالة  $x \mapsto -\frac{x}{x+1}$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  و الدالة  $x \mapsto \ln(x+1)$  معرفة من أجل

$x > -1$  أي  $x \in ]-1; +\infty[$  . إذن مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $] -1; +\infty[$  أي  $E = ]-1; +\infty[$  .

2. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $] -1; +\infty[$  :  $f(x) = \frac{1}{x+1} [-x + (x+1) \ln(x+1)]$  .

نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$  . إذن  $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \ln(x+1) = 0$  .

و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow -1} [-x + (x+1) \ln(x+1)] = 1$  . ولدينا  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$  .

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} [-x + (x+1) \ln(x+1)] = 1$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$  .

3. لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x+1}\right) = -1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $] -1; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

إشارة  $f'(x)$  على  $E$  هي إشارة  $x$  على  $E$ . ينتج أن الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]-1; 0]$  و متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$ .

$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

• دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  لأن  $\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{x+1} + \left(\frac{x+1}{x}\right) \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$  إذن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع مكافئ وفي اتجاه محور الفواصل بجوار  $+\infty$ .

4. لدينا  $f(1) = -\frac{1}{2} + \ln 2$  و  $f'(1) = \frac{1}{4}$ .

إذن معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي  $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \ln 2$

5. دراسة تغيرات الدالة  $g$ .

الدالة  $g$  معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال  $]-1; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$g'(x) = -\frac{(x-1)^2}{4(x+1)^2} ; ]-1; +\infty[$$

نلاحظ أن  $g'(x) = 0$  من أجل  $x = 1$ .

إذن من أجل كل عدد حقيقي من  $]-1; +\infty[$  :  $g'(x) \leq 0$ .

و بالتالي الدالة  $g$  متناقصة تماما على المجال  $]-1; +\infty[$ .

جدول تغيرات  $g$  :

$x$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  و  $g(1) = 0$

من جدول تغيرات الدالة  $g$  ينتج أن  $g(x) < 0$  على المجال  $]1; +\infty[$

ينتج أن  $(\mathcal{C})$  فوق (T) على المجال  $]1; +\infty[$  ،  $(\mathcal{C})$  تحت (T) على المجال  $]-1; 1]$

(T) يقطع  $(\mathcal{C})$  في النقطة ذات الفاصلة 1.

نلاحظ أن النقطة ذات الفاصلة 1 من  $(\mathcal{C})$

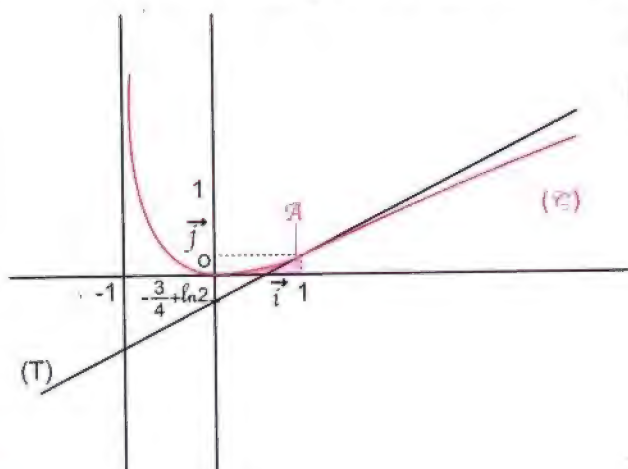
هي نقطة إنعطاف  $(\mathcal{C})$  (لأن (T)

يقطع  $(\mathcal{C})$  فيها).

6. رسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  و المماس (T).

$$f(1) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \approx 0,19$$

$$-\frac{3}{4} + \ln 2 \approx 0,60$$





## تمارين و حلول نموذجية

7. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $E$ ؛  $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$  إذن  $a=1$  و  $b=-1$

8. حساب التكامل  $\int_0^1 \ln(1+x) dx$

نضع  $u'(x) = \frac{1}{x+1}$  و  $v(x) = x+1$  إذن  $u(x) = \ln(x+1)$  و  $v'(x) = 1$

ينتج أن  $\int_0^1 \ln(x+1) dx = \left[ (x+1) \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx$

$$= \left[ (x+1) \ln(x+1) - x \right]_0^1 = 2 \ln 2 - 1$$

إذن  $\int_0^1 \ln(x+1) dx = 2 \ln 2 - 1$

**ملاحظة:** يمكن اختيار  $v(x) = x$  لحساب التكامل السابق.

$$9. \mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[ -1 + \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) \right] dx$$

$$= \left[ -x + \ln(x+1) + (x+1) \ln(x+1) - x \right]_0^1$$

$$= -2 + 3 \ln 2$$

إذن  $\mathcal{A} = -2 + 3 \ln 2$  وحدة المساحات

و بالتالي  $\mathcal{A} = 4(-2 + 3 \ln 2) \text{ cm}^2$  أي  $\mathcal{A} \approx 0,32 \text{ cm}^2$

## تمارين و مسائل

### خواص جبرية

1 بسط :  $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$4 \ln(\sqrt{2}+1) + 4 \ln(\sqrt{2}-1) - 5 \ln 2$

$\frac{\ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)}{2}$

$\frac{7}{16} \ln(3+2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2}+1) - \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$

$2 \ln e^4 ; 8 - \ln \frac{1}{e}$

2 a و b عدنان حقيقيان موجبان تماما .

عبر عن  $\ln a^2 b^3$  و  $6 \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 b}}$  بدلالة  $\ln a$  و  $\ln b$ .

3 عبر عن الأعداد التالية بدلالة  $\ln 2$  و  $\ln 5$ .

$\ln 6,25 ; \ln \frac{16}{25} ; \ln 500$

$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$

4 في كل حالة من الحالات التالية، عين العدد

الطبيعي n حيث :  $2^n \leq 10^3 ; \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-2}$

$1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \geq 0,3 ; \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \leq 0,1$

### معادلات

5 حل كل معادلة من المعادلات التالية في  $\mathbb{R}$

$\ln x = \frac{1}{2} ; \ln x = -2 ; \ln x = 2$

$[\ln x]^2 = 4 ; \ln x^2 = 4 ; \ln |x| = 2$

6 حل في  $\mathbb{R}$  كل معادلة من المعادلات التالية :

$\ln(1-x)^2 = 4 \ln 2 ; \ln(1-x) = 2 \ln 3 - 3 \ln 2$

$\ln \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \ln 3 ; \ln \left(\frac{1}{1-x}\right) = -3 \ln 2$

7 حل كل معادلة من المعادلات التالية في  $\mathbb{R}$

$\ln(2x+7) = \ln(x-3)$

$\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$

$\ln(x-3) = \ln(x+7) - \ln(x+1)$

$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$

$\ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right) = \ln(x+3)$

$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln(x+2)$

$\frac{1}{2} \ln(x-1) + \ln(x+1) = 2 + \ln \sqrt{1+x}$

8 P(x) كثير حدود حيث

$P(x) = 12x^3 + x^2 - 9x + 2$

1. عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث من أجل

كل عدد حقيقي x :  $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $P(x) = 0$ .

2. استنتج حلول المعادلة

$12(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 9 \ln x + 2 = 0$

### مراجعات

9 حل في  $\mathbb{R}$  كل متراجحة من المتراجحات

التالية :  $\ln(3-x) \leq 0 ; \ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) \geq 0$

$\ln(x+2) + \ln(3+x) > 0$

$\ln(x^2 - 4) > \ln(6x + 5)$

$\ln(2x - 5) + \ln(x + 1) \leq 2 \ln 2$

10 حل في  $\mathbb{R}$  كل متراجحة من المتراجحات

التالية :  $\ln(x+1) > \ln(4x-2) - \ln(x-1)$

$\ln(x^2 + 11x + 30) > \ln(x+14)$

$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0 ; \ln(x^2 - 2e^2) \leq \ln x + 1$

### الجميل

11 حل كل جملة من الجمل التالية في  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases} ; \begin{cases} x + y = 30 \\ \ln x + \ln y = 3 \ln 6 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \frac{2}{3} \\ x + y = \frac{4}{3} \end{cases} ; \begin{cases} 2 \ln x + 3 \ln y = -2 \\ 3 \ln x + 5 \ln y = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln(x^2 - y^2) = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} ; \begin{cases} 5x + 4y = 12 \\ \ln(x-1) + \ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases}$

النهايات

12 عین النهايات عند 0 و عند  $+\infty$  لكل من

الدوال التالية (عند وجودها) :

$$\begin{aligned} x \mapsto \sqrt{1 + (\ln x)^2} & ; \quad x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \\ x \mapsto \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1} & ; \quad x \mapsto x - 2 \ln x \end{aligned}$$

13 عین النهايات عند  $+\infty$  لكل دالة من الدوال

$$\begin{aligned} x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) & \quad \text{التالية : (عند وجودها)} \\ x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x} & ; \quad x \mapsto \frac{\ln x}{x - \ln x} \end{aligned}$$

$$x \mapsto x \ln \left(\frac{2x-3}{x}\right) ; \quad x \mapsto \frac{x^2 \ln x}{1+x}$$

$$x \mapsto x - (\ln x)^2 ; \quad x \mapsto \ln \left(\frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}\right)$$

الدوال المشتقة

14 في كل حالة من الحالات التالية، عین

مجموعة قابلية اشتقاق للدالة  $f$  ثم عبّر عن  $f'(x)$

$$f(x) = \ln |7 - 2x| ; \quad f(x) = \ln(5x - 1)$$

$$f(x) = x^2 \ln x ; \quad f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$f(x) = 3x + \ln(1 + e^{-2x}) ; \quad f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$f(x) = \ln(4x^2 - 3x - 1) ; \quad f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} ; \quad f(x) = x^2 \ln(1+x)$$

تعيين دوال أصلية

15  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{2e^x + 1}$$

اثبت أنه يوجد عدنان حقيقيان  $a, b$  حيث من

$$f(x) = a + \frac{be^x}{2e^x + 1} ; \quad x \text{ أجل كل عدد حقيقي}$$

عین دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

16  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 4}$$

اثبت أنه يوجد عدنان حقيقيان  $a, b$  حيث

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$g(x) = ae^x + \frac{be^x}{e^x + 4}$$

عین الدالة الأصلية للدالة  $g$  التي تنعدم عند 0.

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتم العشري

$$a = \frac{\sqrt[6]{6} (\sqrt[3]{2})^2 \sqrt{12}}{\sqrt[3]{3^4} \sqrt[3]{6^2}} \quad \text{بسط كتابة العدد} \quad 17$$

بالرفع إلى القوة 6.

باستعمال القوى الناطقة.

$$18 \quad \sqrt[5]{\frac{1}{32}} ; \quad \sqrt[4]{81^3} ; \quad \sqrt[3]{8} \quad \text{بسط الأعداد التالية} :$$

$$\frac{(\sqrt[3]{4})^2 \sqrt[4]{2}}{\sqrt[10]{4^3}} ; \quad \frac{\sqrt[5]{4^2} \sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{8}}$$

19 حل في  $\mathbb{R}$  كل معادلة من المعادلات التالية :

$$9^x - 3^{x+2} = \frac{5}{4} ; \quad 4^x + 3 \times 2^x + 10 = 0$$

$$x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^x ; \quad 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$$

20 عین مجموعة تعريف و الدالة المشتقة  $f'$

لكل دالة من الدوال  $f$  التالية :

$$f(x) = 2^x ; \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = x^x ; \quad f(x) = x^2 3^x$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x ; \quad f(x) = (\ln x)^x$$

21 عین نهايات الدالة  $f$  عند حدود مجموعة

تعريفها في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x^x ; \quad f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \frac{x^x}{\ln x} ; \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$



25  $f$  هي الدالة المعرفة  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = x - 4 + \ln(1 + e^{3x})$$

و  $(\mathbb{E})$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j}; 0)$ .

1. أثبت أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

2. احسب نهاية  $\ln(1 + e^{3x})$  عند  $-\infty$ .

3. استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathbb{E})$  ثم عين معادلة له.

4. بين أن من اجل كل عدد حقيقي  $x$ ,

$$f(x) = 4x - 4 + \ln(1 + e^{-3x})$$

5. ما هي نهاية  $\ln(1 + e^{-3x})$  عند  $+\infty$  ؟

6. استنتج وجود مستقيم مقارب آخر للمنحنى  $(\mathbb{E})$  ثم عين معادلة له.

7. ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى  $(\mathbb{E})$  في نفس المعلم.

26  $f$  هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 5}{e^{2x} - 2}\right)$$

و  $(\mathbb{E})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j}; 0)$ .

1. ما هي مجموعة التعريف  $E$  للدالة  $f$  ؟

2. ادرس تغيرات الدالة  $f$  و كذا نهاياتها عند حدود مجموعة التعريف  $E$ .

3. لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $E$  كما يلي

$$g(x) = f(x) - x$$

• عين نهاية  $g(x)$  لما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$ .

• ادرس إشارة  $g(x)$ .

• ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى المنحنى  $(\mathbb{E})$  ؟

4. ارسم المنحنى  $(\mathbb{E})$ .

22 عين دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

في كل حالة من الحالات التالية :

$$I = ]0; +\infty[ \quad ; \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$I = ]0; +\infty[ \quad ; \quad f(x) = x^2 \sqrt{x}$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = 5^x$$

### مسائل

23 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي

$$f(x) = (x - 1) \ln(x^2)$$

و  $(\mathbb{E})$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j}; 0)$ .

1. عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2. عين نهايات  $f$  عند حدود مجموعة تعريفها.

3. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

4. حل المعادلة  $f(x) = 0$ .

5. ارسم المنحنى  $(\mathbb{E})$ .

24 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و  $(\mathbb{E})$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j}; 0)$ .

1. عين  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D_f$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{و} \quad D_f \text{ ينتمي إلى } (-x)$$

ما هو التفسير البياني الذي تعطيه لهذه النتيجة ؟

3. بين أن المنحنى  $(\mathbb{E})$  يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة يطلب تعيين معادلة لكل منها.

4. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

5. عين معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(\mathbb{E})$  عند النقطة ذات الفاصلة  $e$ .

6. ارسم  $(\Delta)$  و  $(\mathbb{E})$  في المعلم السابق.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation

### 1 - مبدأ الاستدلال بالتراجع

$P_n$  خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي  $n$ .

إذا كانت الخاصية  $P_0$  صحيحة و من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $P_n$  يستلزم  $P_{n+1}$  فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $P_n$  صحيحة.

#### • كيفية البرهان بالتراجع

للبرهان بالتراجع على أن خاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نتبع المراحل التالية :

1. نتحقق أن  $P_0$  صحيحة.
2. نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  كفي و نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة.
3. نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $P_n$  صحيحة.

**ملاحظة :** يمكن أن تكون الخاصية  $P_n$  معرفة من أجل  $n \geq n_0$ .

في هذه الحالة، نتحقق أن  $P_{n_0}$  صحيحة و نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل العدد الطبيعي  $n$  حيث  $n \geq n_0$ ، و نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة. ثم نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq n_0$ ،  $P_n$  صحيحة.

### II - المتتاليات العددية

#### 1. توليد متتالية

1.1. يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بحددها العام.

مثال :  $(v_n)$  متتالية معرفة بحددها العام  $v_n = n + 3$

للحصول على حد معين يكفي تعويض  $n$  بالعدد الطبيعي المناسب.

لدينا  $v_{10} = 10 + 3 = 13$  ؛  $v_{27} = 27 + 3 = 30$

2.1. يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل  $u_{n+1} = f(u_n)$  حيث  $f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$ .

مثال : المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = u_n + 2$  هي متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لدينا  $u_1 = 4$  ؛  $u_2 = 6$  ؛  $u_3 = 8$  ؛  $u_4 = 10$

**ملاحظة 1 :** في المتتالية  $(v_n)$ ،  $v_{27}$  هو أحد حدودها، 27 هو دليله، أما رتبته فهي متعلقة بعدد الحدود التي تسبقه.

رتبة الحد  $v_k$  بالنسبة إلى الحد  $v_b$  حيث  $b < k$  هي  $b - k + 1$ .

رتبة الحد  $v_{27}$  بالنسبة إلى الحد  $v_0$  هي  $27 - 0 + 1$  أي 28.

رتبة الحد  $v_{27}$  بالنسبة إلى الحد  $v_1$  هي  $27 - 1 + 1$  أي 27.

رتبة الحد  $v_{27}$  بالنسبة إلى الحد  $v_5$  هي  $27 - 5 + 1$  أي 23.



**ملاحظة 2 :** المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بحددها العام  $v_n = n + 3$  هي من الشكل  $v_n = f(n)$

حيث  $f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(v_n)$  و المعرفة كما يلي  $f(x) = x + 3$ .

المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = u_n + 2$

هي من الشكل  $u_{n+1} = f(u_n)$  حيث  $f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$

و المعرفة كما يلي :  $f(x) = x + 2$ .

3.1. المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$ .

المتتاليات الهندسية	المتتاليات الحسابية
<p><b>تعريف :</b> <math>(u_n)</math> متتالية هندسية حدها الأول <math>u_0</math> إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي <math>q</math> بحيث من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> : <math>u_{n+1} = qu_n</math>. <math>q</math> يسمى أساس المتتالية الهندسية <math>(u_n)</math>.</p>	<p><b>تعريف :</b> <math>(u_n)</math> متتالية حسابية حدها الأول <math>u_0</math> إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي <math>r</math> بحيث من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> : <math>u_{n+1} = u_n + r</math>. <math>r</math> يسمى أساس المتتالية الحسابية <math>(u_n)</math>.</p>
<p><b>الحد العام لمتتالية هندسية</b></p> <p><math>(u_n)</math> متتالية هندسية حدها الأول <math>u_0</math> و أساسها <math>q</math> الحد العام <math>u_n</math> معرف كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> : <math>u_n = u_0 \times q^n</math>.</p>	<p><b>الحد العام لمتتالية حسابية</b></p> <p><math>(u_n)</math> متتالية حسابية حدها الأول <math>u_0</math> و أساسها <math>r</math>. الحد العام <math>u_n</math> معرف كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> : <math>u_n = u_0 + nr</math>.</p>
<p><b>حساب المجموع <math>S</math> حيث <math>S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}</math></b></p> <p><math>(u_n)</math> متتالية هندسية حدها الأول <math>u_0</math> و أساسها <math>q</math>. إذا كان <math>q = 1</math> فإن <math>S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = nu_0</math> إذا كان <math>q \neq 1</math> فإن <math>S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)</math> حيث <math>n</math> هو عدد حدود المجموع <math>S</math>.</p>	<p><b>حساب المجموع <math>S</math> حيث <math>S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}</math></b></p> <p><math>(u_n)</math> متتالية حسابية حدها الأول <math>u_0</math> و أساسها <math>r</math>. <math>S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n \left( \frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \right)</math> حيث <math>n</math> هو عدد حدود المجموع <math>S</math>. <b>ملاحظة :</b> يمكن كتابة المجموع <math>S</math> على الشكل التالي : <math>S = nu_0 + \frac{n(n-1)r}{2}</math></p>
<p><b>ملاحظة :</b> إذا كان <math>q = 1</math> فإن كل حدود المتتالية الهندسية مساوية للحد <math>u_0</math>. إذا كان <math>q = 0</math> فإن كل الحدود بدءاً من <math>u_1</math> منعدمة. إذا كان <math>q = -1</math> فإن من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> ، <math> u_n  =  u_0 </math>.</p>	<p><b>ملاحظة :</b> إذا كان <math>r = 1</math> فإن كل حدود المتتالية الحسابية مساوية للحد <math>u_0</math>.</p>

## 2. خواص المتتاليات

### 2.1. اتجاه تغير متتالية عددية

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$ .

•  $(u_n)$  متزايدة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} \geq u_n$ .

•  $(u_n)$  متناقصة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} \leq u_n$ .

•  $(u_n)$  ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = u_n$ .

• إذا كانت  $(u_n)$  متزايدة أو متناقصة نقول إنها رتيبة.

**ملاحظة 1 :** ندرس بنفس الطريقة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  إذا كانت معرفة على جزء من  $\mathbb{N}$ .

**ملاحظة 2 :** نستنتج اتجاه تغير متتالية حسابية  $(u_n)$  حسب إشارة أساسها  $r$ .

$r = 0$	$r < 0$	$r > 0$
$(u_n)$ ثابتة	$(u_n)$ متناقصة تماما	$(u_n)$ متزايدة تماما

و نستنتج اتجاه تغير متتالية هندسية  $(u_n)$  حسب إشارة حدها الأول  $u_0$  و قيمة أساسها  $q$ .

$q > 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$	
$(u_n)$ متزايدة تماما	$(u_n)$ ثابتة	$(u_n)$ متناقصة تماما	$u_0 > 0$
$(u_n)$ متناقصة تماما		$(u_n)$ متزايدة تماما	$u_0 < 0$

• إذا كان  $q < 0$  فإن المتتالية الهندسية  $(u_n)$  ليست رتيبة.

• إذا كان  $q = 0$  فإن المتتالية الهندسية  $(u_n)$  ثابتة بدءا من  $u_1$ .

### 2.2. المتتاليات المحدودة

#### تعريف

$(u_n)$  متتالية عددية.

• المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي  $M$  حيث

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq M$ .

• المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي  $m$  حيث

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq m$ .

• المتتالية  $(u_n)$  محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأسفل.



## 2.3. نهاية متتالية عددية

$(u_n)$  متتالية عددية و  $l$  عدد حقيقي.

تعريف

العدد الحقيقي  $l$  هو نهاية المتتالية  $(u_n)$  عندما يؤول  $n$  إلى  $+\infty$  إذا وفقط إذا كان من أجل كل مجال  $[\alpha; \beta[$  يوجد عدد طبيعي  $p$  بحيث مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  يحقق  $n \geq p$  :  $u_n$  ينتمي إلى المجال  $[\alpha; \beta[$ . نكتب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

ملاحظات

- إذا كانت نهاية المتتالية  $(u_n)$  عندما يؤول  $n$  إلى  $+\infty$  عددا حقيقيا  $l$  نقول إن  $(u_n)$  متقاربة.
- إذا كانت نهايتها  $+\infty$  أو  $-\infty$  أو غير موجودة فإن  $(u_n)$  غير متقاربة و نقول عنها إنها متباعدة.

مبرهنة

إذا كانت متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

## 2.4. مبرهنات حول نهايات متتاليات

مبرهنة

$(u_n)$  متتالية معرفة بعلاقة من الشكل  $u_n = f(n)$  حيث  $f$  دالة معرفة على مجال  $[\alpha; +\infty[$ .  $\alpha$  عدد حقيقي.  $l$  هو عدد حقيقي أو  $+\infty$  أو  $-\infty$ . إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

مبرهنة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و  $l \in I$  :  $(u_n)$  متتالية معرفة بعلاقة من الشكل  $u_{n+1} = f(u_n)$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \in I$ . إذا كانت  $(u_n)$  متقاربة نحو  $l$  و  $f$  مستمرة عند  $l$  فإن  $l = f(l)$ .

المبرهنات المتعلقة بحساب نهايات متتاليات

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان عدديتان :  $l$  و  $l'$  عددان حقيقيان.

• نهاية مجموع متتاليتين

$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$l$	$l$	$l$	إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ هي
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$l'$	و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ هي
حالة عدم تعيين	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$l + l'$	فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ هي





### مبرهنة 3

$(u_n)$ ،  $(v_n)$ ،  $(w_n)$  متتاليات عددية،  $l$  عدد حقيقي.

إذا كان (بدءاً من مرتبة معينة)	و كان ...	فإن ...
$u_n \leq w_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$
$v_n \leq u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$
$ v_n - l  \leq u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$
$v_n \leq u_n \leq w_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

### 2.6. نهاية متتالية هندسية

#### مبرهنة

$(u_n)$  متتالية هندسية حدّها الأول  $u_0$  وأساسها  $q$ .

• إذا كان  $q > 1$  و  $u_0 > 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

• إذا كان  $q > 1$  و  $u_0 < 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

• إذا كان  $-1 < q < 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

• إذا كان  $q \leq -1$  فإن نهاية  $(u_n)$  غير موجودة.

#### ملاحظات

• إذا كانت المتتالية  $(u_n)$  متزايدة و غير محدودة من الأعلى فإنها متباعدة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

• إذا كانت المتتالية  $(u_n)$  متناقصة و غير محدودة من الأسفل فإنها متباعدة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

### III - المتتاليتان المتجاورتان

#### تعريف

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان عدديتان.

نقول عن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  إنهما متجاورتان إذا تحقق ما يلي :

إحدى المتتاليتين متزايدة و الأخرى متناقصة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

#### مبرهنة 1

إذا كانت متتاليتان متجاورتين فكل منهما متقاربة و لهما نفس النهاية.

#### مبرهنة 2

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان متجاورتان و نهايتهما  $l$ .

إذا كانت  $(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq l \leq v_n$

إذا كانت  $(u_n)$  متناقصة و  $(v_n)$  متزايدة فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n \leq l \leq u_n$



1 اثبات خاصية بالتراجع

تمرين 1

( $u_n$ ) متتالية معرفة كما يلي  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$  .  
أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 2$  .

حل

• لتكن  $P_n$  الخاصية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $0 < u_n < 2$  .  
•  $u_0 = 1$  إذن  $0 < u_0 < 2$  . بالتالي  $P_0$  صحيحة .  
• ليكن  $n$  عددا طبيعيا . نفرض أن  $P_n$  صحيحة أي  $0 < u_n < 2$  .  
نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $0 < u_{n+1} < 2$  .  
لدينا  $0 < u_n < 2$  إذن  $2 < u_n + 2 < 4$  .  
ينتج أن  $\sqrt{2} < \sqrt{u_n + 2} < 2$  . و بالتالي  $0 < \sqrt{u_n + 2} < 2$  .  
نستنتج أن  $0 < u_{n+1} < 2$  أي  $P_{n+1}$  صحيحة .  
إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، إذا كانت  $P_n$  صحيحة فإن  $P_{n+1}$  صحيحة .  
و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $P_n$  صحيحة .  
• ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 2$  .

تمرين 2

• أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  :  $n! \geq 2^{n-1}$  .  
علما أن  $1! = 1$  و من أجل  $n \geq 2$  :  $n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$  .

حل

$P_n$  هي الخاصية المعرفة من أجل  $n \geq 1$  كما يلي :  $n! \geq 2^{n-1}$  .  
• لدينا من أجل  $n = 1$  :  $2^{1-1} = 2^0 = 1$  و  $1! = 1$  . إذن  $1! \geq 2^{1-1}$  أي  $P_1$  صحيحة .  
• ليكن  $n$  عددا طبيعيا حيث  $n \geq 1$  . نفرض أن  $P_n$  صحيحة أي  $n! \geq 2^{n-1}$  .  
نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة : أي  $(n+1)! \geq 2^n$  .  
نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  :  $n+1 \geq 2$  .  
لدينا  $n! \geq 2^{n-1}$  و  $n+1 \geq 2$  إذن  $(n+1)n! \geq 2^{n-1} \times 2$  أي  $(n+1)! \geq 2^n$  .  
و بالتالي  $P_{n+1}$  صحيحة .  
نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ، إذا كانت  $P_n$  صحيحة فإن  $P_{n+1}$  صحيحة .  
و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ،  $P_n$  صحيحة .  
إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  :  $n! \geq 2^{n-1}$  .



### تمرين 3

• أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  :  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

**حل**

نثبت ذلك بالتراجع.

• نضع  $P_n$  الخاصية المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

• لدينا من أجل  $n=1$  :  $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

إذن من أجل  $n=1$  :  $\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{1+1}$  و بالتالي  $P_1$  صحيحة.

• ليكن  $n$  عددا طبيعيا حيث  $n \geq 1$  نفرض أن  $P_n$  صحيحة

أي من أجل عدد طبيعي  $n \geq 1$  :  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

و نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

• حسب الفرض لدينا  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

\* ينتج أن  $\left( \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

لدينا  $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

و بالتالي  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

إذن من أجل العدد الطبيعي  $n \geq 1$  إذا كان  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

فإن  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  :  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

### 2 استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية

#### تمرين 1

• مثل بيانيا كلا من المتتاليات  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :

$$1. \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{و} \quad u_0 = 0$$

$$2. \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1 \quad \text{و} \quad u_0 = 0$$

$$3. \quad u_{n+1} = \frac{3+u_n}{u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 1$$

استعمل تمثيل كل منها لتخمين سلوكها ونهايتها.

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  $(\Delta)$  هو المستقيم الذي معادلته  $y = x$ .

1. تمثيل المتتالية  $(u_n)$

حيث  $u_0 = 0$  و  $u_{n+1} = 2u_n + 1$

$f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$  و المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  كما يلي :

$f(x) = 2x + 1$  و  $(\mathcal{E})$  تمثيلها البياني.

مجموعة النقط  $M_n(u_n; u_{n+1})$  حيث  $u_{n+1} = f(u_n)$

هي التمثيل البياني للمتتالية  $(u_n)$ .

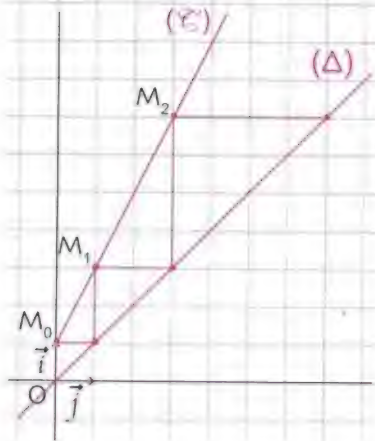
النقط  $M_0(u_0; u_1)$ ,  $M_1(u_1; u_2)$ ,  $M_2(u_2; u_3)$ , ...

هي نقط من التمثيل البياني للمتتالية.

$(\mathcal{E})$  هو المستقيم الذي معادلته  $y = 2x + 1$

النقط  $M_0, M_1, M_2, \dots$  هي نقط من هذا المستقيم.

**التخمين:** المتتالية  $(u_n)$  متزايدة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$



2. تمثيل المتتالية  $(u_n)$  حيث  $u_0 = 0$  و  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

$f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$  و  $(\mathcal{E})$  التمثيل البياني

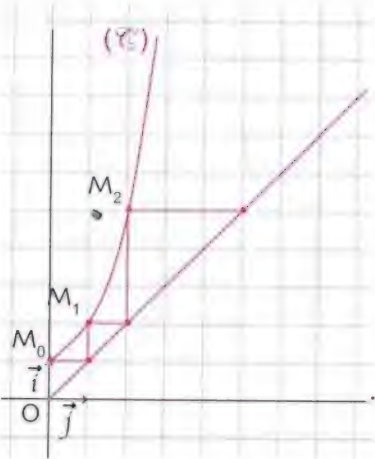
للدالة  $f$  المعرفة على  $[0; +\infty[$  بـ  $f(x) = x^2 + 1$

النقط  $M_0(u_0; u_1)$ ,  $M_1(u_1; u_2)$ ,  $M_2(u_2; u_3)$ , ...

نقط من التمثيل البياني للمتتالية  $(u_n)$ .

المنحنى  $(\mathcal{E})$  و هو فرع لقطع مكافئ يشمل النقط  $M_0, M_1, M_2, \dots$

**التخمين:** المتتالية  $(u_n)$  متزايدة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$



3. تمثيل المتتالية  $(u_n)$  حيث  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{u_n}$

$f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$  و  $(\mathcal{E})$  هو التمثيل البياني

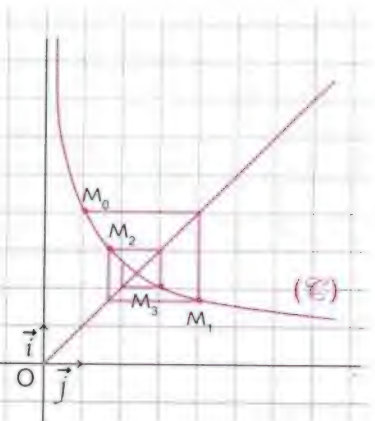
للدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{3 + x}{x}$

$M_0, M_1, M_2, \dots$  هي نقط من التمثيل البياني للمتتالية  $(u_n)$ .

المنحنى  $(\mathcal{E})$  يشمل النقط  $M_0, M_1, M_2, \dots$  و هو فرع قطع زائد.

**التخمين:** المتتالية  $(u_n)$  ليست رتيبة. المتتالية  $(u_n)$  متقاربة

و نهايتها هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  مع  $(\mathcal{E})$ .



### تمرين 1

( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي  $u_{n+1} = \frac{n+3}{2n-1}$

1. برهن أن المتتالية ( $u_n$ ) محدودة.
2. حدد اتجاه تغيراتها ثم عين  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### حل

1. المتتالية ( $u_n$ ) معرفة بعلاقة من الشكل  $u_n = f(n)$  حيث  $f$  هي الدالة المعرفة

على المجال  $[1; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[1; +\infty[$  و دالتها المشتقة هي  $f'$  حيث  $f'(x) = \frac{-7}{(2x-1)^2}$

لدينا  $f'(x) < 0$  على المجال  $[1; +\infty[$  و بالتالي  $f$  متناقصة على  $[1; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  يكون كالآتي :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	4	$\frac{1}{2}$

من جدول تغيرات  $f$  ينتج أن على المجال  $[1; +\infty[$

$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 4$  و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 4$$

أي المتتالية ( $u_n$ ) محدودة من الأسفل بالعدد  $\frac{1}{2}$  و من الأعلى بالعدد 4.

2. الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $[1; +\infty[$  إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم

$$f(n+1) \leq f(n) \quad \text{أي من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير منعدم, } u_{n+1} \leq u_n$$

و بالتالي المتتالية ( $u_n$ ) متناقصة على  $\mathbb{N}^*$ .

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \frac{1}{2} \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

### تمرين 2

لتكن المتتالية ( $u_n$ ) المعرفة كما يلي :  $u_0 = 7$  و  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - 3$

1. لتكن المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة كما يلي :  $v_n = u_n + k$  :  $k \in \mathbb{R}$  عين  $k$  بحيث تكون ( $v_n$ ) متتالية هندسية. حدد عندئذ أساسها و حدها الأول.
2. عبر عن  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$ .
3. عين  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .



1. من المساواة  $v_n = u_n + k$  ينتج أن  $u_n = v_n - k$ . تعيين  $v_{n+1}$  بدلالة  $v_n$ .  
 لدينا  $v_{n+1} = u_{n+1} + k = \left(\frac{u_n}{2} - 3\right) + k = \frac{1}{2}(v_n - k) - 3 + k = \frac{1}{2}v_n + \frac{k}{2} - 3$   
 وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{k}{2} - 3$   
 تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية إذا كان  $\frac{1}{2}k - 3 = 0$  أي  $k = 6$ .  
 وبالتالي من أجل  $k = 6$  المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_0$   
 حيث  $v_0 = u_0 + 6$  أي  $v_0 = 13$ .  
 1.  $(v_n)$  متتالية هندسية إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$   
 أي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = 13 \left(\frac{1}{2}\right)^n$   
 ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 13 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$   
 3. لدينا  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -6$

### تمرين 3

- لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :  $u_n = \frac{\sin n + (-1)^n}{n}$   
 1. أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة.  
 2. أدرس اتجاه تغير  $(u_n)$  ثم عين  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

1. نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم ،  $-1 \leq \sin n \leq 1$  و  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ .  
 إذن  $-2 \leq \sin n + (-1)^n \leq 2$  ينتج أن  $-\frac{2}{n} \leq \frac{\sin n + (-1)^n}{n} \leq \frac{2}{n}$   
 بما أن  $n \geq 1$  فإن  $0 < \frac{1}{n} \leq 1$  و  $0 < \frac{2}{n} \leq 2$  و  $0 > -\frac{2}{n} \geq -2$   
 وبالتالي  $-2 \leq -\frac{2}{n} \leq \frac{\sin n + (-1)^n}{n} \leq \frac{2}{n} \leq 2$   
 إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم ،  $-2 \leq u_n \leq 2$ . ينتج أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة  
 من الأعلى بالعدد 2 و من الأسفل بالعدد -2. إذن المتتالية  $(u_n)$  محدودة.  
 2. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم ،  $-1 \leq \sin n \leq 1$  و  $-1 + (-1)^n \leq \sin n + (-1)^n \leq 1 + (-1)^n$   
 إذا كان  $n$  زوجيا فإن  $n+1$  فردي وبالتالي  $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}$  و  $-\frac{2}{n} \leq u_{n+1} \leq 0$   
 إذا كان  $n$  فرديا فإن  $n+1$  زوجي وبالتالي  $-\frac{2}{n} \leq u_n \leq 0$  و  $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{n}$

ينتج أن إذا كان  $n$  زوجيا فإن  $u_{n+1} \leq u_n$ .

إذا كان  $n$  فرديا فإن  $u_{n+1} \geq u_n$ .

و بالتالي  $(u_n)$  ليست متزايدة و ليست متناقصة على  $\mathbb{N}^*$ .

أي المتتالية  $(u_n)$  ليست رتيبة على  $\mathbb{N}^*$ .

• بما أن  $-\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{2}{n} = 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

#### 4 معرفة و استعمال مفهوم المتتاليتين المتجاورتين

##### تمرين 1

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n = -\frac{1}{n+1}$  و  $v_n = \frac{5}{2n+3}$ .

هل المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان ؟

حل

• دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{-n-1+n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \text{إذن من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} - u_n > 0$$

و بالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}$ .

• دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(v_n)$ .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{5}{2n+2+3} - \frac{5}{2n+3} = \frac{10n+15-10n-25}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{-10}{(2n+5)(2n+3)}$$

لدينا

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-10}{(2n+5)(2n+3)} < 0 \quad \text{إذن من أجل كل عدد طبيعي } n : v_{n+1} - v_n < 0$$

و بالتالي المتتالية  $(v_n)$  متناقصة على  $\mathbb{N}$ .

• حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$ .

$$v_n - u_n = \frac{7n+8}{(2n+3)(n+1)} = \frac{7n+8}{2n^2+5n+3}$$

لدينا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \quad \text{إذن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n+8}{2n^2+5n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{2n} = 0$$

لدينا  $(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

## تمرين 2

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$  و  $v_n = \frac{n}{n+2}$ .  
 • أثبت أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متجاورتين.

حل

• دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

$$\text{لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

$$\text{إذن } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \text{نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي } n$$

و بالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}$ .

• دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(v_n)$ .

$$\text{لدينا } v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$$

$$\text{إذن } v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+3)(n+2)} > 0 \quad \text{نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي } n$$

و بالتالي المتتالية  $(v_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}$ .

المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  لهما نفس اتجاه التغير إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متجاورتين.

## تمرين 3

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  و  $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ .

1. بين أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

2. عين حصرا لنهايتهما من أجل  $n = 8$ .

حل

1. دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

$$\text{لدينا } u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

• حساب  $u_{n+1} - u_n$ .

$$\text{لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \quad \text{إذن من أجل كل عدد } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

ينتج أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}^*$ .

• حساب  $v_{n+1} - v_n$ .

$$\text{لدينا } v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$$



نلاحظ أن من أجل كل عدد  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $\frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$ .

إذن المتتالية  $(v_n)$  متناقصة على  $\mathbb{N}^*$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0 \text{ لدينا}$$

بما أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة و المتتالية  $(v_n)$  متناقصة على  $\mathbb{N}^*$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$  فإن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

2. بما أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان فإن كلا منهما متقاربة و لهما نفس النهاية  $\ell$

التي تحقق من أجل كل عدد طبيعي  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $u_n \leq \ell \leq v_n$ .

لنحصل على الحصر التالي حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ .

$$\text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ من } \mathbb{N}^* : v_n - u_n = \frac{1}{n!}$$

تعيين حصر من أجل  $n = 8$  لنهاية  $(u_n)$  باستعمال المتباينة المضغفة  $u_n \leq \ell \leq v_n$

و قيم العدد الحقيقي  $\frac{1}{n!}$ .

$$0,0416666 \leq \frac{1}{4!} \leq 0,0416667$$

$$1 \leq 1 \leq 1 \text{ لدينا}$$

$$0,0083333 \leq \frac{1}{5!} \leq 0,0083334$$

$$1 \leq \frac{1}{1!} \leq 1$$

$$0,0013888 \leq \frac{1}{6!} \leq 0,0013889$$

$$0,5 \leq \frac{1}{2!} \leq 0,5$$

$$0,0001984 \leq \frac{1}{7!} \leq 0,0001985$$

$$0,1666666 \leq \frac{1}{3!} \leq 0,1666667$$

$$0,0000248 \leq \frac{1}{8!} \leq 0,0000249$$

$$2,7182785 \leq \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \leq 2,7182791 \text{ بالجمع طرف لطرف نجد}$$

$$2,7182785 \leq \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k!} \leq 2,7182791 \text{ أي}$$

$$\text{و بالتالي } 2,7182785 \leq u_n \leq 2,7182791 \text{ من أجل } n = 8.$$

$$2,7182785 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 2,7182791 \text{ ينتج أن}$$

$$\text{إذن } 2,7182785 \leq \ell \leq 2,7182791.$$

**ملاحظة :** يمكن تعيين حصر للعدد  $\ell$  من أجل  $n$  أكبر، و تقريب  $\ell$  من  $e$  أساس اللوغاريتم التبييري.

## تمارين و حلول نموذجية

### مسألة

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} \quad ; \quad u_0 = -1 \quad \text{و من أجل كل عدد طبيعي } n$$

1. احسب الحدود  $u_1, u_2, u_3$ .

2. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :  $u_n > 0$ .

3. أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد  $\sqrt{3}$ .

4. أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

5. احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### حل

1. حساب  $u_1, u_2, u_3$ .

$$\text{لدينا } u_0 = -1 \quad ; \quad u_1 = \frac{3 + 2u_0}{2 + u_0} = \frac{3 - 2}{2 - 1} = 1 \quad \text{أي } u_1 = 1$$

$$u_2 = \frac{3 + 2}{2 + 1} = \frac{5}{3} \quad \text{أي } u_2 = \frac{5}{3}$$

$$u_3 = \frac{3 + \frac{10}{3}}{2 + \frac{5}{3}} = \frac{19}{11} \quad \text{أي } u_3 = \frac{19}{11}$$

2. نبرهن أن من أجل كل عدد  $n$  طبيعي غير منعدم :  $u_n > 0$ .  
من أجل ذلك نطبق الإستدلال بالتراجع.

لتكن  $P_n$  الخاصية المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :  $u_n > 0$ .

من أجل  $n = 1$  :  $u_1 = 1$  إذن  $u_1 > 0$ .

إذن الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل  $n = 1$ .

نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل العدد الطبيعي غير المنعدم  $n$  : أي  $u_n > 0$ .

نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $u_{n+1} > 0$ .

نعلم أن  $u_n > 0$  إذن  $3 + 2u_n > 0$  و  $2 + u_n > 0$  و بالتالي  $\frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} > 0$ .

ينتج أن  $u_{n+1} > 0$  أي  $P_{n+1}$  صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم  $n$  :  $P_n$  صحيحة.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :  $u_n > 0$ .

3. إثبات أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد  $\sqrt{3}$ .

من أجل ذلك نثبت أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq \sqrt{3}$ .

نضع  $P'_n$  الخاصية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n \leq \sqrt{3}$ .

من أجل  $n = 0$  :  $-1 \leq \sqrt{3}$  إذن  $u_0 \leq \sqrt{3}$  أي  $P'_n$  صحيحة من أجل  $n = 0$ .

إذن الخاصية  $P'_n$  صحيحة من أجل  $n = 0$ .

نفرض أن  $P'_n$  صحيحة من أجل العدد الطبيعي  $n$  و نبرهن أن  $P'_{n+1}$  صحيحة أي  $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ .

من أجل ذلك يكفي أن نبرهن أن  $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq 0$ .

$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - \sqrt{3} = \frac{(3 - 2\sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})u_n}{2 + u_n} = \frac{(2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{2 + u_n} \quad \text{لدينا}$$

نعلم أن  $2 - \sqrt{3} > 0$  و  $u_n - \sqrt{3} \leq 0$  و  $2 + u_n > 0$  إذن  $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq 0$ .

و بالتالي  $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ . نستنتج أن  $P'_n$  صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq \sqrt{3}$ .

4. دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{(\sqrt{3} - u_n)(\sqrt{3} + u_n)}{2 + u_n}. \quad u_{n+1} - u_n \text{ إشارة}$$

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم،  $u_n > 0$  و  $u_n \leq \sqrt{3}$ .

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :  $\frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} \geq 0$ .

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

من أجل  $n = 0$  : لدينا  $u_1 - u_0 = 1 - (-1) = 2$  أي  $u_1 - u_0 = 2$  إذن  $u_1 - u_0 > 2$ .

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

و بالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}$ .

5. حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

نعلم أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}$  و محدودة من الأعلى بالعدد  $\sqrt{3}$ ، إذن  $(u_n)$  متقاربة.

الدالة  $f$  المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$  هي الدالة المستمرة على  $]0; +\infty[$  حيث  $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$ .

نضع  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ . نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم :  $u_n > 0$ .

نبحث عن  $l$  في المجال  $]0; +\infty[$  حيث  $l = f(l)$ .

لدينا  $l = f(l)$  يعني  $l = \frac{3 + 2l}{2 + l}$ . أي  $l^2 = 3$ . ينتج أن  $l = \sqrt{3}$ . إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$ .



الاستدلال بالتراجع

1 (u<sub>n</sub>) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$$

1. برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $0 < u_n < 3$ .

2. برهن أن المتتالية (u<sub>n</sub>) متزايدة.

2 (u<sub>n</sub>) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

1. برهن أنه مهما يكن n من  $\mathbb{N}$  :  $u_n < 2$ .

2. برهن أن المتتالية (u<sub>n</sub>) متزايدة.

3 (u<sub>n</sub>) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$u_0 = 9 \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$$

1. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n :  $u_n > 3$ .

2. برهن أن المتتالية (u<sub>n</sub>) متناقصة.

4 (u<sub>n</sub>) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = 2u_n - 3$$

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n :  $u_n = 3 - 2^n$ .

5 (u<sub>n</sub>) هي المتتالية المعرفة كما يلي:

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{4 + u_n}$$

1. أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

2. ما هو اتجاه تغير الدالة  $x \mapsto \frac{1+x}{4+x}$

على المجال [0 ; 1] ؟

3. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u<sub>n</sub>) ؟

6 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n

غير منعدم :  $4^n - 1$  مضاعف 3.

7 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n

$7 \times 3^{5n} + 4$  يقبل القسمة على 11.

8 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n

$4^n - 3n - 1$  يقبل القسمة على 9.

9 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n

$n^3 - n$  يقبل القسمة على 3.

10 a عدد حقيقي موجب تماما. برهن أن من أجل

كل عدد طبيعي n :  $(1+a)^n \geq 1 + na$ .

11 ليكن العدد S<sub>n</sub> حيث

$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

12 ليكن العدد S<sub>n</sub> حيث

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

توليد متتاليات

13 (u<sub>n</sub>) هي المتتالية المعرفة كما يلي:

$$u_0 = 1 \text{ و } u_1 = 2 \text{ و } u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$$

• عبر عن u<sub>n</sub> بدلالة n.

• ادرس سلوك المتتالية (u<sub>n</sub>).

• في التمارين 14، 15، 16، 17 يطلب تمثيل

المتتالية (u<sub>n</sub>) و تخمين سلوكها و تعيين نهايتها

إن وجدت.

$$u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = 1 - 2u_n \quad 14$$

$$u_0 = 3 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{1 + u_n} \quad 15$$

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \quad 16$$

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \quad 17$$

## خواص المتتاليات

**18** ادرس إن كانت المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأسفل أو من الأعلى أو محدودة في كل من الحالات التالية :

$$\begin{array}{l} u_n = \frac{n+3}{2n-1} \cdot 3 \\ u_n = \frac{n+2}{n} \cdot 1 \\ u_n = \frac{n^2+1}{n} \cdot 2 \end{array}$$

**19** نفس السؤال بالنسبة إلى المتتاليات  $(u_n)$  التالية:

$$\begin{array}{l} u_n = 4^n - 3^n \cdot 3 \\ u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \cdot 1 \\ u_n = \sqrt{n^2+1} - n \cdot 2 \end{array}$$

**20** برهن أن المتتالية المعرفة كما يلي :  $u_0 = \frac{1}{7}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$  محدودة من الأعلى بالعدد  $\frac{3}{4}$ .

**21** ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي :

$$v_n = -n \quad \text{و} \quad u_n = \frac{n+1}{n}$$

**22** ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين الهندسيتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  بعد تعيين حدها الأول (من أجل  $n = 0$ )

$$v_n = \frac{1}{3^{n-1}} \quad \text{و} \quad u_n = 2^{n-1}$$

**23** ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي

$$v_n = (-2)^{n-1} \quad \text{و} \quad u_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

**24**  $(u_n)$  هي متتالية معرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. برهن أن  $(u_n)$  متناقصة.

2. أثبت أن  $(u_n)$  متقاربة. ما هي نهايتها ؟

**25** ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليات الهندسية  $(u_n)$  التالية علما أن حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $q$ .

1.  $u_0 = -2$  و  $q = \frac{1}{3}$ .

2.  $u_0 = \frac{2}{3}$  و  $q = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

**26** ادرس اتجاه تغير المتتالية الهندسية  $(v_n)$  التالية علم حدها الأول  $v_0$  وأساسها  $q$ .

$$\begin{array}{l} v_0 = 1 \quad \text{و} \quad q = 2 \cdot 1 \\ v_0 = -1 \quad \text{و} \quad q = -3 \cdot 2 \end{array}$$

**27** ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي :

$$\begin{array}{l} u_{n+1} = \sqrt{n+7} \quad \text{و} \quad u_0 = 1 \cdot 1 \\ v_{n+1} = \sqrt{3v_n+1} \quad \text{و} \quad v_0 = 8 \cdot 2 \end{array}$$

**28**  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_n = 1 + n + \sin n$$

1. أحصر  $(u_n)$  بمتتاليتين حسابيتين  $(v_n)$  و  $(w_n)$ .

2. استنتج نهاية  $(u_n)$  لماؤول  $n$  إلى  $+\infty$ .

**29**  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي

$$u_n = \frac{n^4}{n!}$$

ادرس اتجاه تغير  $(u_n)$  و نهايتها إن وجدت.

**30**  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :

$$2u_n = u_{n+1} + 1 \quad \text{و} \quad u_0 = 2$$

1. برهن أن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بحدها العام  $v_n = u_n - 1$  هي متتالية هندسية.

2. عبر عن  $u_n$  بدلالة  $n$ .

3. ادرس نهاية  $(u_n)$ .

**31**  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} - 4 \quad \text{و} \quad u_0 = 3$$

1. ادرس اتجاه تغير هذه المتتالية.

2.  $(v_n)$  هي المتتالية المعرفة كما يلي :

$v_n = u_n + 6$ . أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية.

عين  $v_n$  بدلالة  $n$ .

3. ما هي نهاية  $(u_n)$  ؟

المتتاليات المتجاورتان

32  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}$

كما يلي :  $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$  و  $v_n = \frac{2n+7}{n+2}$

أثبت أن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان و عين نهايتهما .

33  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}$

كما يلي :  $u_n = \frac{3n+4}{n+1}$  و  $v_n = \frac{3n^2+4}{n^2+1}$

أثبت أن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متجاورتين .

34  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}^*$

كما يلي :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  و  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

أثبت أن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان .

35  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}^*$

كما يلي :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  و  $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

أثبت أن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان .

مسائل

36  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = 1$  و  $u_n = u_{n-1} + n^2 - n + 5$

1 . عين الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية .

2 . برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :

$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3 . برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :

$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4 . استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

5 . هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ؟

37 نعرف المتتالية  $(u_n)$  بحددها الأول  $u_0 = 0$

و علاقة التراجع التالية  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$

1 . احسب الحدود  $u_1, u_2, u_3$  .

2 . لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]-2; +\infty[$

كما يلي  $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

و  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j}; O)$  ، (الوحدة 2cm) .

أ . ارسم المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$

و المنحنى  $(\mathcal{C})$  في المعلم السابق .

ب . استعمل المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(\mathcal{C})$  لتمثيل النقط

من محور الفواصل التي فواصلها هي  $u_0, u_1, u_2, u_3$  .

ج . ماذا يمكن تخمينه حول سلوك المتتالية  $(u_n)$  ؟

3 . برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .

4 . أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي

$0 \leq u_n \leq 2$  :  $n$

5 . احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

38  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$

كما يلي :  $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2} \end{cases}$

1 . احسب الحدود  $u_1, u_2, u_3$  .

2 . نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال

$[\frac{2}{3}; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \sqrt{3x-2}$

ليكن  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j}; O)$  ،

(الوحدة 1cm) .

$(\Delta)$  هو المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  .

أ . ارسم  $(\Delta)$  و  $(\mathcal{C})$  في المعلم السابق .

ب . باستعمال المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(\mathcal{C})$  ، عين النقط

من  $(\mathcal{C})$  التي فواصلها  $u_0, u_1, u_2, u_3$  .

ج . ماذا يمكن تخمينه حول سلوك المتتالية  $(u_n)$  ؟

3 . أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأسفل بالعدد 2 .

4 . أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة .

5 . استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

6 . احسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  .



أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation

### 1 - تكامل دالة مستمرة

#### 1. تعريف

$f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $I$ .  $a$  و  $b$  عددان من  $I$ .  
 $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ .  
 العدد  $F(b) - F(a)$  يسمى التكامل من  $a$  إلى  $b$  للدالة  $f$ .  
 يرمز إليه بالرمز  $\int_a^b f(x) dx$  و يقرأ التكامل من  $a$  إلى  $b$  لـ  $f(x)$  تفاضل  $x$ .  
 و نكتب  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

**ملاحظة:** العدد  $\int_a^b f(x) dx$  يتعلق بالدالة  $f$ ،  $a$  و  $b$  فهو مستقل عن المتغير  $x$ .  
 أي أن  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$

#### 2. التفسير الهندسي

المستوي منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . المنحنى الممثل للدالة  $f$  في هذا المعلم.

الدالة  $f$  موجبة على المجال  $[a; b]$

العدد الحقيقي الموجب  $\int_a^b f(x) dx$  هو مساحة الحيز  $A$

للمستوي المحدود بالمنحنى  $(C)$  و محور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = b$ .

نكتب :  $A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

الدالة  $f$  سالبة على المجال  $[a; b]$

العدد الحقيقي  $\int_a^b f(x) dx$  سالب و العدد الحقيقي

الموجب  $-\int_a^b f(x) dx$  هو مساحة الحيز  $B$

للمستوي المحدود بالمنحنى  $(C)$ ، محور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = b$ .

نكتب :  $B = -\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$

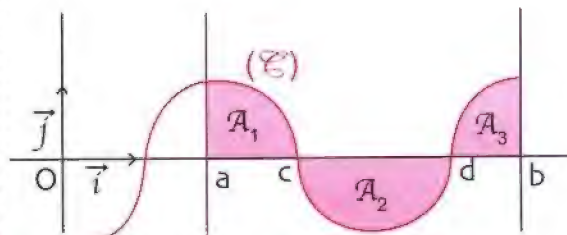
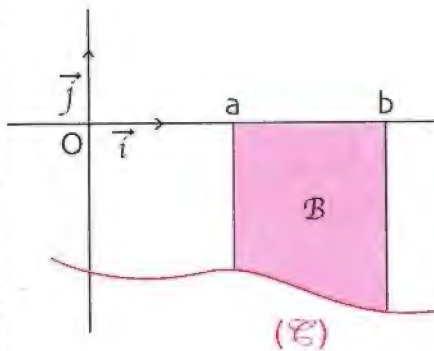
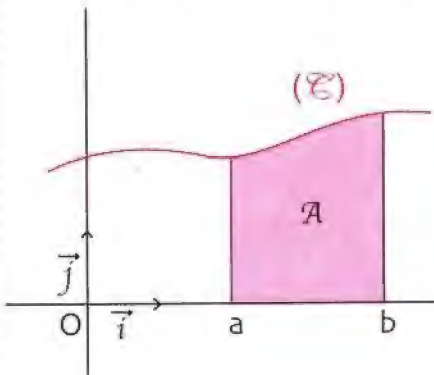
إشارة الدالة  $f$  تتغير على المجال  $[a; b]$

الدالة  $f$  معرفة و مستمرة على المجال  $[a; b]$ .

العدد الحقيقي  $\int_a^b |f(x)| dx$  هو مساحة الحيز  $A$

للمستوي المحدود بالمنحنى  $(C)$  و محور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = b$



$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 : \text{ في الشكل يظهر أن } \\ = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

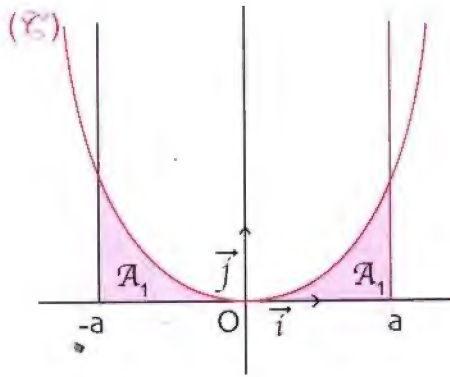
## II - الخواص

### خاصية الخطية للتكامل

$f$  و  $g$  دالتان معرفتان و مستمرتان على مجال  $I$ .  $a$  و  $b$  عددان من المجال  $I$ . من أجل كل عددين حقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  :

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

### شعبية الدالة

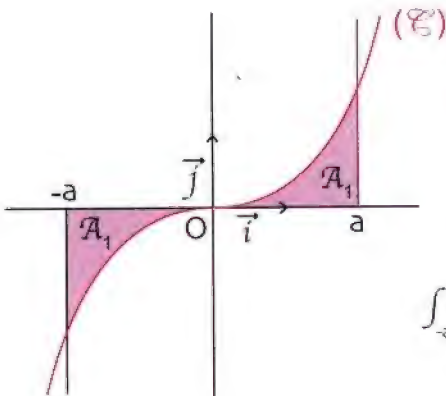


$f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $I$ .  
إذا كانت  $f$  زوجية على  $I$ .  
فإن من أجل كل عدد  $a$  من  $I$  :  
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

في الشكل المقابل، الدالة  $f$  موجبة

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \mathcal{A}_1$$

(و إذا كانت  $f$  سالبة فإن  $\int_{-a}^a f(x) dx = -2 \mathcal{A}_1$ )



إذا كانت  $f$  فردية على  $I$ .

فإن من أجل كل عدد  $a$  من  $I$  :  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

في الشكل المقابل، الدالة  $f$  موجبة على  $[0 ; a]$

و سالبة على  $[-a ; 0]$ . إذن  $\int_{-a}^a f(x) dx = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1 = 0$

### علاقة شال

$f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $I$ .

من أجل كل عدد  $a$  من  $I$  :  $\int_a^a f(x) dx = 0$

من أجل كل أعداد  $a, b$  و  $c$  من  $I$  :  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  (علاقة شال)

نتيجة : من أجل كل عددين  $a$  و  $b$  من  $I$  :  $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

(أو أيضا :  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ )



### مبرهنة (إيجابية التكامل)

$f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $[a ; b]$ .  
إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $[a ; b]$ ،  $f(x) \geq 0$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

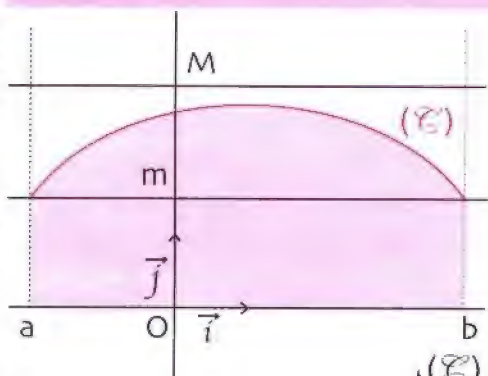
### مبرهنة

$f$  و  $g$  دالتان معرفتان و مستمرتان على المجال  $[a ; b]$ .  
إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $[a ; b]$ ،  $f(x) \leq g(x)$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

### مبرهنة (متباينة المتوسط)

$f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $[a ; b]$ .  
إذا كان  $m$  و  $M$  عددين حقيقيين حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $[a ; b]$ ،  $m \leq f(x) \leq M$ .  
فإن  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

### التفسير الهندسي



بفرض أن  $f$  موجبة على  $[a ; b]$ .  
\* يكون  $m(b-a)$  هي مساحة المستطيل الذي بعده  $b-a$  و  $m$ .

$M(b-a)$  هي مساحة المستطيل الذي بعده  $b-a$  و  $M$ .  
 $\int_a^b f(x) dx$  هي مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(C)$ ،  
محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x=a$  و  $x=b$ .

### القيمة المتوسطة لدالة

$f$  دالة معرفة و مستمرة و موجبة على مجال  $[a ; b]$ .

### تعريف

القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على مجال  $[a ; b]$  هي العدد الحقيقي  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

### مبرهنة (حصص القيمة المتوسطة)

إذا كان  $m$  و  $M$  عددين حقيقيين حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $[a ; b]$ ،  $m \leq f(x) \leq M$ .  
فإن  $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ .

### III - التكاملات والدوال الأصلية

### مبرهنة

إذا كانت  $f$  مستمرة على مجال  $I$  و  $a \in I$  فإن الدالة  $F$  المعرفة على  $I$  كما يلي:  
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة  $f$  التي تنعدم عند  $a$ .

## المكاملة بالتجزئة

إذا كانت  $u$  و  $v$  دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال  $I$  حيث الدالتان  $u'$  و  $v'$  مستمرتان على  $I$ .  
فإن  $\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt$ .  
هذه الطريقة لحساب  $\int_a^b u'(t) v(t) dt$  تسمى المكاملة بالتجزئة.

### حساب مساحات محدودة بمنحني

$f$  دالة مستمرة على مجال  $I$ ؛  $a$  و  $b$  عددان من  $I$  حيث  $a < b$ .  
( $\mathcal{C}_f$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 $A$  مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحني ( $\mathcal{C}_f$ ) و محور الفواصل و المستقيمين

ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = b$ .

### مبرهنة

• إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  
 $f(x) \geq 0$  فإن  $A = \int_a^b f(x) dx$  (وحدة المساحات)

• إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  
 $f(x) \leq 0$  فإن  $A = - \int_a^b f(x) dx$  (وحدة المساحات)

• إذا كانت إشارة  $f$  تتغير على  $[a; b]$ ،  
فإن  $A = \int_a^b |f(x)| dx$  (وحدة المساحات)

ملاحظة : في الشكل المقابل،

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

### حساب مساحة محدودة بمنحنيين

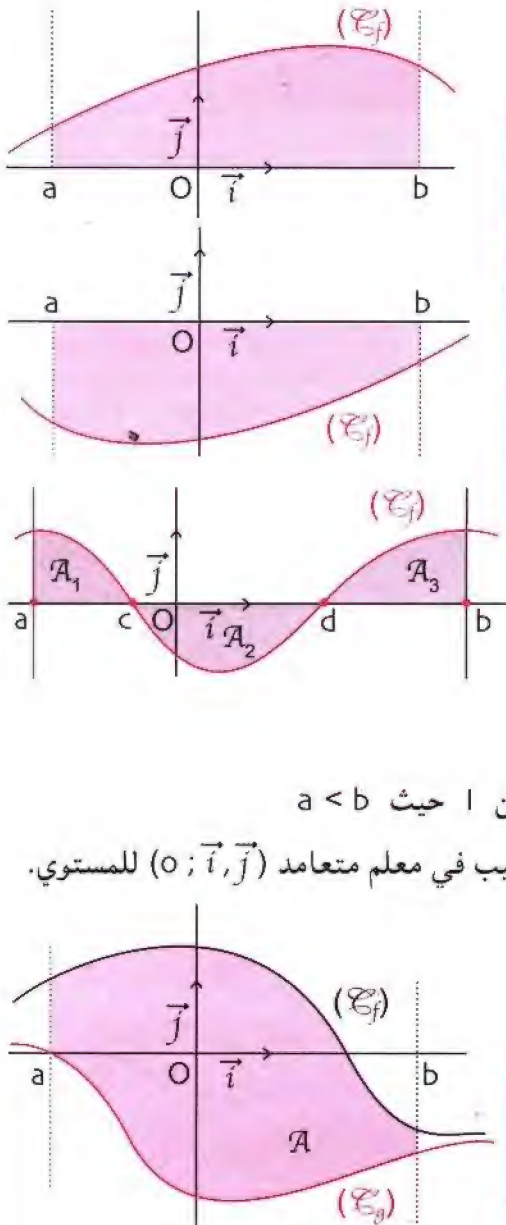
$f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على المجال  $I$ ؛  $a$  و  $b$  عددان من  $I$  حيث  $a < b$ .  
( $\mathcal{C}_f$ ) و ( $\mathcal{C}_g$ ) المنحنيان المثلان للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب في معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  للمستوي.

### مبرهنة

$A$  هي المساحة المحدودة بالمنحنيين ( $\mathcal{C}_f$ ) و ( $\mathcal{C}_g$ )

و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = b$ .

إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  :  $f(x) \leq g(x)$   
فإن  $A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$  (وحدة المساحات)





**ملاحظة :** إذا كان  $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$  و  $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$

فإن وحدة المساحات هي  $1\text{cm}^2$ .

إذا كان  $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$  و  $\|\vec{j}\| = 3\text{cm}$  فإن وحدة المساحات هي  $6\text{cm}^2$ .

فإن  $A = 5 \times 6\text{cm}^2 = 30\text{cm}^2$

**حساب حجوم**

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلم متعامد من الفضاء.  $(\mathcal{E})$  جزء من الفضاء محدود بالمستويين ذوي المعادلتين  $z = a$  ;

$z = b$  و  $V$  حجمه.

**مبرهنة**

$t$  ينتمي إلى المجال  $[a; b]$ . ليكن  $S(t)$  مساحة السطح الناتج عن تقاطع الجزء  $(\mathcal{E})$  مع المستوي ذي المعادلة  $z = t$  أي المستوي العمودي على  $(Oz)$  في  $P(0; 0; t)$  و الموازي للمستوي  $(oxy)$ .

إذا كانت الدالة  $S$  مستمرة على  $[a; b]$  فإن  $V = \int_a^b S(t) dt$  (وحدة الحجوم).

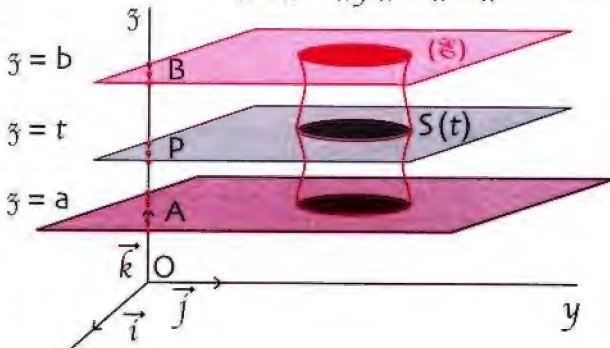
**ملاحظة :** إذا كان المعلم متعامدا و متجانسا  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$

فإن وحدة الحجوم هي  $1\text{cm}^3$ .

إذا كان المعلم متعامدا حيث  $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

و  $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$  و  $\|\vec{k}\| = 3\text{cm}$

فإن وحدة الحجوم هي  $6\text{cm}^3$ .



**حجم مجسم دوراني محوره هو محور القواصل**

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلم متعامد و متجانس من الفضاء. ليكن  $(\mathcal{E}_f)$  المنحني الممثل لدالة  $f$  المستمرة

على مجال  $[a; b]$  حيث  $a < b$  في المستوي ذي المعادلة  $z = 0$  (أي المستوي  $(oxy)$ ).

**مبرهنة**

عندما يدور المنحني حول المحور  $(O; \vec{i})$  فإنه يولد مجسما

دورانيا حجمه  $V = \int_a^b \pi [f(t)]^2 dt$  حيث  $t \in [a; b]$ .

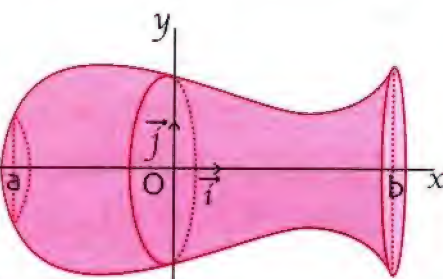
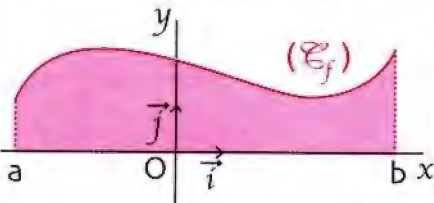
**ملاحظة :** بتطبيق المبرهنة السابقة و بملاحظة أن مساحة الحيز

المستوي المحصل عليها بتقاطع الجزء  $(\mathcal{E})$  مع المستوي ذي

المعادلة  $x = t$ ،  $t \in [a; b]$  هي مساحة القرص الذي نصف

قطره  $|f(x)|^2$ . إذن  $S(t) = \pi [f(t)]^2$

و بالتالي  $V = \int_a^b \pi [f(t)]^2 dt$





1 حساب تكامل دالة مستمرة

تمارين

احسب التكاملات التالية :

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx \quad ; \quad \int_{-2}^2 (4x + 5) dx \quad ; \quad \int_{-1}^4 3 dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x - 3\sin x) dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} \sin x dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} \cos x dx$$

حل

حساب التكامل  $\int_{-1}^4 3 dx$

الدالة  $f: x \mapsto 3$  ثابتة إذن  $f$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

و بالتالي فهي مستمرة على المجال  $[-1; 4]$ .

الدالة  $F$  المعرفة على  $[-1; 4]$  كما يلي :  $F(x) = 3x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[-1; 4]$ .

$$\int_{-1}^4 3 dx = F(4) - F(-1) = 3 \times 4 - 3(-1) = 12 + 3 = 15$$

$$\int_{-1}^4 3 dx = 15 \quad \text{إذن}$$

حساب التكامل  $\int_{-2}^2 (4x + 5) dx$

الدالة  $f: x \mapsto 4x + 5$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ . فهي مستمرة على المجال  $[-2; 2]$ .

الدالة  $F$  المعرفة على  $[-2; 2]$  كما يلي :  $F(x) = 2x^2 + 5x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[-2; 2]$ .

$$\int_{-2}^2 (4x + 5) dx = F(2) - F(-2) = (2(2)^2 + 5 \times 2) - (2(-2)^2 + 5(-2))$$

$$= (8 + 10) - (8 - 10) = 20$$

$$\int_{-2}^2 (4x + 5) dx = 20 \quad \text{و بالتالي}$$

حساب التكامل  $\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx$

الدالة  $f: x \mapsto x^2 - x + 1$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ . فهي مستمرة على المجال  $[0; 1]$ .

الدالة  $F$  المعرفة على  $[0; 1]$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0; 1]$ .

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = F(1) - F(0) = \left[ \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 + 1 \right] - \left[ \frac{1}{3} \times 0 - \frac{1}{2} \times 0 + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \frac{5}{6} \quad \text{و بالتالي}$$

حساب التكامل  $\int_0^{\pi} \cos x dx$

الدالة  $f: x \mapsto \cos x$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ . فهي مستمرة على المجال  $[0; \pi]$ .

الدالة  $F$  المعرفة على  $[0; \pi]$  كما يلي :  $F(x) = \sin x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0; \pi]$ .

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = F(\pi) - F(0) = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = 0 \quad \text{و بالتالي}$$

• حساب التكامل  $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

الدالة  $f: x \mapsto \sin x$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ . فهي مستمرة على المجال  $[0; \pi]$ .

الدالة  $F$  المعرفة على  $[0; \pi]$  كما يلي :  $F(x) = -\cos x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0; \pi]$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = F(\pi) - F(0) = -\cos \pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

وبالتالي  $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0$

• حساب التكامل  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx$

الدالة  $f: x \mapsto 3\cos x - 2\sin x$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ . فهي مستمرة على المجال  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

الدالة  $F$  المعرفة على  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  كما يلي :  $F(x) = 3\sin x + 2\cos x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$

على  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \left[3\sin \frac{\pi}{2} + 2\cos \frac{\pi}{2}\right] - \left[3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= (3 \times 1 + 2 \times 0) - (3 \times (-1) + 2 \times 0) = 3 + 3 = 6$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx = 6 \quad \text{و بالتالي}^*$$

## 2 استعمال خاصية الخطية لحساب تكامل

### تمرين 1

1. تحقق أن من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  :  $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$

2. احسب  $\int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx$

### حل

1. من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  :  $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x - 1) - (x + 1)} = \frac{2}{x^2 - 1}$

و بالتالي من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  :  $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$

2. حساب التكامل  $\int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx$

لتكن  $f$  الدالة حيث  $f: x \mapsto \frac{2}{x^2 - 1}$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  : و مستمرة على كل مجال محتوى في  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

إذن  $f$  مستمرة على المجال  $[2; 3]$ .

و بالتالي فهي تقبل على الأقل دالة أصلية على المجال  $[2; 3]$ .

$$\text{لدينا } \int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx = \int_2^3 \left[ \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right] \, dx = \int_2^3 \frac{1}{x - 1} \, dx - \int_2^3 \frac{1}{x + 1} \, dx$$

(استعمال خاصية الخطية للتكامل)

الدالة  $F$  المعرفة على  $[2; 3]$  كما يلي :  $F(x) = \ln(x-1)$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x-1}$  على  $[2; 3]$ .

والدالة  $G$  المعرفة على  $[2; 3]$  كما يلي :  $G(x) = \ln(x+1)$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x+1}$  على  $[2; 3]$ .

$$\text{لدينا} \quad \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = F(3) - F(2) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x+1} dx = G(3) - G(2) = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

$$\int_2^3 \frac{2}{x^2-1} dx = \ln 2 - \ln \frac{4}{3} = \ln \frac{2}{\frac{4}{3}} = \ln \frac{3}{2} \quad \text{ينتج أن}$$

$$\int_2^3 \frac{2}{x^2-1} dx = \ln \frac{3}{2} \quad \text{إذن}$$

## تمرين 2

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  ؛ كما يلي :  $f(x) = \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}$

1. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1 :  $f(x) = 4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2}$

2. احسب  $\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx$

## حل

1. من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1 :  $4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} = f(x)$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1 :  $f(x) = 4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2}$

2. حساب  $\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx$

لدينا الدالة  $f$  مستمرة على كل من المجالين  $]-\infty; 1[$  و  $]1; +\infty[$ .

لأنها دالة ناطقة. و بالتالي الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[2; 4]$ .

فهي تقبل دالة أصلية على المجال  $[2; 4]$ .

$$\text{لدينا} \quad \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx = \int_2^4 \left[ 4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx$$

$$= \int_2^4 4(x-1) dx + \int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2} dx$$

الدالة  $F$  المعرفة على  $[2; 4]$  كما يلي :  $F(x) = 2x^2 - 4x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto 4(x-1)$

على  $[2; 4]$ . الدالة  $G$  المعرفة على  $[2; 4]$  كما يلي :  $G(x) = \frac{1}{x-1}$

هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{-1}{(x-1)^2}$  على  $[2; 4]$ .



$$\int_2^4 4(x-1) dx = F(4) - F(2) = [2(4)^2 - 4(4)] - [2 \times 2^2 - 4 \times 2] = 16 \quad \text{إذن}$$

$$\int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2} dx = G(4) - G(2) = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{1}\right) = -\frac{2}{3} \quad \text{و}$$

$$\int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 4(x-1) dx + \int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2} dx = 16 - \frac{2}{3} = \frac{46}{3} \quad \text{ينتج أن}$$

$$\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx = \frac{46}{3} \quad \text{إذن}$$

### 3 استعمال علاقة شال

#### تمرين 1

$$1. \text{ احسب كلا من التكاملين } \int_0^3 x(x^2 + 1) dx \quad \text{و} \quad \int_{-3}^0 [-x(x^2 + 1)] dx$$

$$2. \text{ استنتج حساب التكامل } \int_{-3}^3 |x|(x^2 + 1) dx$$

#### حل

1. لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $[-3; 3]$  كما يلي :  $f(x) = |x|(x^2 + 1)$  على المجال  $[0; 3]$  :  $f(x) = x(x^2 + 1)$  و على المجال  $[-3; 0]$  :  $f(x) = -x(x^2 + 1)$ .  
الدالة  $f$  مستمرة على كل من المجالين  $[-3; 0]$  و  $[0; 3]$ . إذن تقبل على الأقل دالة أصلية على كل

من هذين المجالين. الدالة  $F$  المعرفة على  $[-3; 3]$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$

هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0; 3]$ . و الدالة  $G$  المعرفة على  $[-3; 0]$  كما يلي :

$$G(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{هي دالة أصلية } f \text{ على } [-3; 0].$$

$$\text{ينتج أن } \int_0^3 x(x^2 + 1) dx = F(3) - F(0) = \frac{99}{4} \quad \text{و} \quad \int_{-3}^0 [-x(x^2 + 1)] dx = \frac{99}{4}$$

$$2. \int_{-3}^3 |x|(x^2 + 1) dx = \int_{-3}^0 -x(x^2 + 1) dx + \int_0^3 x(x^2 + 1) dx = \frac{99}{4} + \frac{99}{4} = \frac{99}{2}$$

$$\text{أي } \int_{-3}^3 |x|(x^2 + 1) dx = \frac{99}{2}$$

#### تمرين 2

$$\text{احسب التكامل } \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$$

#### حل

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $[-1; 1]$  كما يلي :  $f(x) = |e^x - 1|$

من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[-1; 0]$  :  $f(x) = -(e^x - 1)$

و من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[0; 1]$  :  $f(x) = e^x - 1$

الدالة  $f$  مستمرة على كل من المجالين  $[-1; 0]$  و  $[0; 1]$ . إذن تقبل دالة أصلية على الأقل على كل هذين المجالين.

الدالة  $F$  حيث  $F(x) = -e^x + x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[-1; 0]$ .

والدالة  $G$  حيث  $G(x) = e^x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[1; 0]$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx &= \int_{-1}^0 -(e^x - 1) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\ &= [F(0) - F(-1)] + [G(1) - G(0)] = \frac{1}{e} + e - 2 \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx = \frac{1}{e} + e - 2 \quad \text{إذن}$$

#### 4 استعمال إيجابية التكامل

##### تمرين

$$1. \text{ اثبت أن } \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx \geq 0$$

2. تحقق من ذلك بحساب هذا التكامل.

##### حل

1. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; \pi]$  كما يلي :  $f(x) = x + 1 - \sin x$

لدينا من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[0; \pi]$  :  $0 \leq \sin x \leq 1$

إذن من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[0; \pi]$  :  $0 \leq 1 - \sin x$

ينتج أن من أجل كل عدد  $x$  من  $[0; \pi]$  :  $x + 1 - \sin x \geq 0$

بما أن الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[0; \pi]$  فإنها تقبل على الأقل دالة أصلية على  $[0; \pi]$ .

و بما أن من أجل كل عدد  $x$  من  $[0; \pi]$  :  $x + 1 - \sin x \geq 0$  فإن  $\int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx \geq 0$

2. التحقق من صحة هذه النتيجة حسابيا.

لدينا الدالة  $F$  المعرفة على  $[0; \pi]$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \cos x$  هي دالة أصلية

للدالة  $f$  على  $[0; \pi]$ .

$$\int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx = F(\pi) - F(0) = \left( \frac{1}{2}\pi^2 + \pi + \cos \pi \right) - \left( \frac{1}{2} \times 0 + 0 + \cos 0 \right)$$

$$\text{إذن} \quad = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 1 - 1 = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2$$

$$\text{و بالتالي} \quad \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2$$

$$\text{و بما أن} \quad \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2 > 0 \quad \text{فإن} \quad \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx > 0 \quad \text{ينتج أن}$$

$$\text{أي أن} \quad \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx \geq 0$$

**ملاحظة :** إذا تحقق الشرط  $f(x) \geq 0$  على المجال  $[a; b]$  فإنه يضمن إيجابية التكامل

أي  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  والعكس غير صحيح يمكن أن يكون  $\int_a^b (x + 1 - \sin x) dx > 0$  دون تحقق

الشرط  $f(x) \geq 0$  على كل المجال  $[a; b]$ .

**لاحظ المثال المضاد :**  $\int_{-2}^4 (-x + 2) dx$  الدالة  $-x + 2$  ليست دوما موجبة على  $[-2; 4]$

$$\text{و} \quad \int_{-2}^4 (-x + 2) dx = 6$$

### تمرين 1

ليكن التكامل  $I$  التالي :  $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{t}{1+t} \right) dt$  برهن أن  $\frac{1}{8} \leq I \leq \frac{1}{3}$  ، بدون حساب التكامل  $I$ .

#### حل

من أجل كل عدد  $t$  من المجال  $\left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$  ،  $\frac{3}{2} \leq 1+t \leq 2$  و بالتالي من أجل كل عدد  $t$

$$\text{من } \left[ \frac{1}{2}; 1 \right] , \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{2}{3} .$$

$$\text{وبما أن } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{ إذن } \frac{1}{4} \leq \frac{t}{1+t} \leq \frac{2}{3}$$

و بالتالي  $\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{t}{1+t} \right) dt \leq \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{2} \right)$  (متباينة المتوسط).

$$\text{أي أن } \frac{1}{8} \leq I \leq \frac{1}{3} \text{ و بالتالي } \frac{1}{8} \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{t}{1+t} \right) dt \leq \frac{1}{3} .$$

### تمرين 2

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان ينتميان إلى المجال  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$  حيث  $a < b$ .

$$1. \text{ برهن أن من أجل كل عدد } x \text{ من المجال } \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] : \frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$2. \text{ استنتج أن } \frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

#### حل

1. بفرض  $a \leq x \leq b$  ، ينتج أن  $\cos a \geq \cos x \geq \cos b$  لأن الدالة  $\cos$  متناقصة على المجال  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$

$$\text{و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من أجل } \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] : \frac{1}{\cos a} \leq \frac{1}{\cos x} \leq \frac{1}{\cos b}$$

$$\text{لأن } \cos a > 0 \text{ و } \cos b > 0 \text{ و } \cos x > 0 .$$

$$\text{ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] : \frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$2. \text{ بما أن من أجل كل عدد } x \text{ من المجال } \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] : \frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$\text{فإن } \frac{1}{\cos^2 a} (b-a) \leq \int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx \leq \frac{1}{\cos^2 b} (b-a) \text{ (متباينة المتوسط)}$$

$$\text{أي أن } \frac{b-a}{\cos^2 a} \leq [\tan x]_a^b \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

لأن الدالة  $\tan x \mapsto x$  دالة أصلية للدالة  $\frac{1}{\cos^2 x}$  على المجال  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ .

$$\text{و بالتالي } \frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$



6 حساب القيمة المتوسطة لدالة

تقرين 1

$f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$  : كما يلي  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$  المجال  
احسب القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ .

حل

الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$  فهي تقبل على الأقل دالة أصلية على  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ .

الدالة  $F$  المعرفة كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{3} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\frac{\pi}{6} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) dx \text{ هي } \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \text{ على } f \text{ القيمة المتوسطة للدالة} \\ & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) dx = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \frac{1}{3} \sin\left(3 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ لدينا} \\ & = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{6} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{6}{\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ وبالتالي } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ إذن}$$

ينتج أن القيمة المتوسطة للدالة  $f$  حيث  $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$  على المجال  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$  هي  $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ .

7 استعمال المكاملة بالتجزئة

تقرين

احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$$\int_1^x \ln t \, dt \quad ; \quad \int_1^e x \ln x \, dx \quad ; \quad \int_0^1 (2-t) e^t \, dt \quad ; \quad \int_0^\pi (2x+3) \sin x \, dx \quad (x > 1)$$

حل

$$\int_0^\pi (2x+3) \sin x \, dx \text{ حساب التكامل}$$

نضع  $v(x) = 2x+3$  و  $u'(x) = \sin x$ . إذن  $v'(x) = 2$  و  $u(x) = -\cos x$  (لأن الدالة  $v$  قابلة للاشتقاق على  $[0; \pi]$  و الدالة  $u'$  مستمرة على  $[0; \pi]$ ).

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (2x+3) \sin x \, dx &= \left[ -(2x+3) \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-2 \cos x) \, dx \\ &= 2\pi + 6 + 2 \int_0^\pi \cos x \, dx = 2\pi + 6 + 2 \left[ \sin x \right]_0^\pi \\ &= 2\pi + 6 + 2 \times 0 = 2\pi + 6 \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi (2x+3) \sin x \, dx = 2\pi + 6 \text{ إذن}$$

$$\int_0^1 (2-t) e^t \, dt \text{ حساب التكامل}$$

نضع  $u(t) = 2-t$  و  $v'(t) = e^t$ . الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على  $[0; 1]$  و الدالة  $v'$  مستمرة على  $[0; 1]$ . إذن  $u'(t) = -1$  و  $v(t) = e^t$ .

$$\int_0^1 (2+t) e^t dt = \left[ (2-t) e^t \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^t) dt = (-3e + 2) + \int_0^1 e^t dt$$

$$= e - 2 + [e^t]_0^1 = 2e - 3$$

و بالتالي  $\int_0^1 (2-t) e^t dt = 2e - 3$

. حساب التكامل  $\int_1^e x \ln x dx$

نضع  $u'(x) = x$  و  $v(x) = \ln x$ . الدالة  $u'$  مستمرة على  $[1; e]$  والدالة  $v$  قابلة للاشتقاق على  $[1; e]$ . إذن  $u(x) = \frac{1}{2} x^2$  و  $v'(x) = \frac{1}{x}$ .

$$\int_1^e x \ln x dt = \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{1}{2} x dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$$

$$\int_1^e x \ln x dt = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \quad \text{و بالتالي}$$

. حساب التكامل  $\int_1^x \ln t dt$  حيث  $x > 1$ .

نضع  $u'(x) = 1$  و  $v(t) = \ln t$ . الدالة  $u'$  مستمرة على  $[1; x]$  والدالة  $v$  قابلة للاشتقاق على  $[1; x]$ . إذن  $u(x) = t$  و  $v'(x) = \frac{1}{t}$ .

$$\int_1^x \ln t dt = \left[ t \ln t \right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln x - \int_1^x 1 dt$$

$$= x \ln x - [t]_1^x = x \ln x - x + 1$$

$$\int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1 \quad \text{ينتج أن}$$

**8** تعيين الدالة الأصلية لدالة ، تنعدم عند عدد حقيقي معلوم

**تمرين**

$f(x) = \sqrt{x} \ln x$  : كما يلي :  $[0; +\infty[$  هي الدالة المعرفة على  $[0; +\infty[$  عين الدالة الأصلية للدالة  $f$  التي تنعدم عند العدد 1.

**حل**

الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $[0; +\infty[$ . إذن  $f$  تقبل على الأقل دالة أصلية على  $[0; +\infty[$ .

الدالة الأصلية للدالة  $f$  على  $[0; +\infty[$  والتي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة  $F$  المعرفة

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t} \ln t dt \quad \text{كما يلي :}$$

حساب التكامل  $\int_1^x \sqrt{t} \ln t dt$  باستعمال المكاملة بالتجزئة.

نضع  $u'(t) = \sqrt{t}$  و  $v(t) = \ln t$ . الدالة  $u'$  مستمرة على  $[0; +\infty[$  والدالة  $v$  قابلة للاشتقاق

$$\text{على } [0; +\infty[. \text{ إذن } u(t) = \frac{2}{3} t \sqrt{t} \text{ و } v'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\int_1^x \sqrt{t} \ln t dt = \left[ \frac{2}{3} t \sqrt{t} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{2}{3} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{2}{3} \left[ \frac{2}{3} t \sqrt{t} \right]_1^x$$

$$= \frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + \frac{4}{9}$$

ينتج أن الدالة الأصلية  $f$  التي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة  $F$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + \frac{4}{9}$ .

### 9 حساب مساحة حيز من المستوي

#### تمرين

احسب المساحة  $A$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = \ln 2$  و  $x = \lambda$  حيث  $\lambda > \ln 2$ .

#### حل

الدالة  $f$  موجبة على المجال  $[\ln 2; \lambda]$ .

إذن المساحة هي العدد الموجب  $A$  حيث  $A = \int_{\ln 2}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ .

بوضع  $u(x) = e^x + 1$ ، الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال  $[\ln 2; \lambda]$  و  $u'(x) = e^x$ .

إذن  $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$  يكتب على الشكل :

$f$  تقبل دالة أصلية على  $[\ln 2; \lambda]$  هي الدالة  $F$  المعرفة على المجال  $[\ln 2; \lambda]$

كما يلي :  $F(x) = \ln [u(x)]$ . أي من أجل كل عدد  $x$  من  $[\ln 2; \lambda]$  :  $F(x) = \ln (e^x + 1)$ .

ينتج أن  $A = \int_{\ln 2}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = F(\lambda) - F(\ln 2) = \ln (e^{\lambda} + 1) - \ln (e^{\ln 2} + 1)$

$$= \ln (e^{\lambda} + 1) - \ln 3 = \ln \left( \frac{e^{\lambda} + 1}{3} \right)$$

و بالتالي  $A = \ln \left( \frac{e^{\lambda} + 1}{3} \right)$

### 10 حساب حجم حيز من الفضاء

#### تمرين

الرسم التالي يمثل المنحنى  $(\mathcal{C})$  للدالة  $f$  المعرفة على  $[0; 9]$  كما يلي :  $f(x) = \sqrt{9-x}$

1. احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز  $A$  للمستوي الملون.

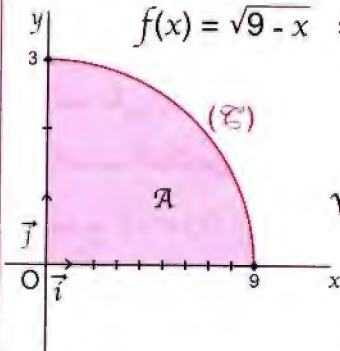
2. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

عندما يدور المنحنى  $(\mathcal{C})$  حول محور الفواصل، يولد مجسما  $S_1$  حجمه  $V_1$

و عندما يدور حول محور الترتيب يولد مجسما  $S_2$  حجمه  $V_2$ .

احسب الحجم  $V_1$  حيث  $\|\vec{i}\| = \frac{1}{3} \text{ cm}$  و  $\|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \text{ cm}$

احسب الحجم  $V_2$  حيث  $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$  و  $\|\vec{i}\| = \|\vec{k}\| = \frac{1}{3} \text{ cm}$



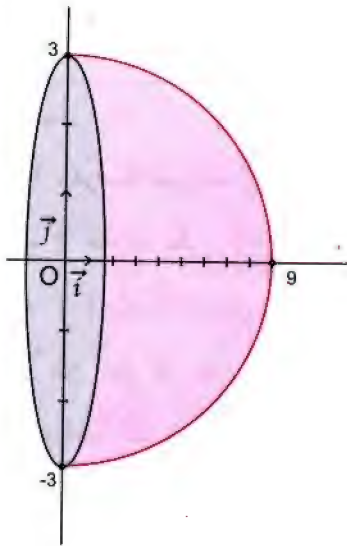


1. حساب مساحة الحيز  $\mathcal{A}$ .

الحيز  $\mathcal{A}$  هو الجزء المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$  وبمحور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين  $x = 0$  و  $x = 9$ .  
وبما أن الدالة  $f$  موجبة على المجال  $[0 ; 9]$  فإن  $\mathcal{A} = \int_0^9 f(x) dx$ .  
حساب  $\int_0^9 f(x) dx$ .

لدينا من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[0 ; 9]$  :  $f(x) = (9 - x)^{\frac{1}{2}}$  ؛  
الدالة  $F$  حيث  $F(x) = -\frac{2}{3}(9 - x)^{\frac{3}{2}}$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $[0 ; 9]$

و بالتالي  $\mathcal{A} = \int_0^9 f(x) dx = F(9) - F(0) = -\frac{2}{3}(9 - 9)\sqrt{9 - 9} + \frac{2}{3}(9 - 0)\sqrt{9 - 0} = 18$   
أي  $\mathcal{A} = 18$  (وحدة المساحات).



وحدة المساحات هي  $\frac{1}{3} \text{ cm}^2$  ينتج أن  $\mathcal{A} = 6 \text{ cm}^2$ .

2. حساب الحجم  $V_1$ .

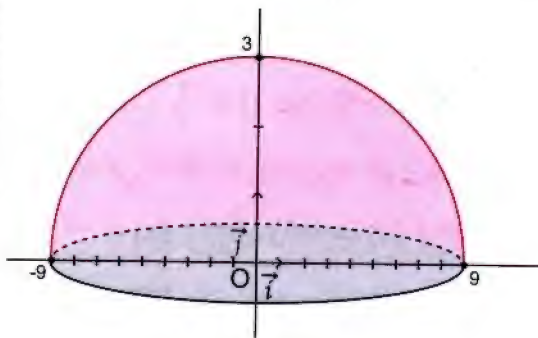
لدينا  $V_1 = \int_0^9 S(t) dt$

$$= \int_0^9 \pi [f(t)]^2 dt = \left[ \pi \left( 9t - \frac{1}{2} t^2 \right) \right]_0^9$$

$$= \pi \left( 81 - \frac{81}{2} \right) - \pi \times 0 = \frac{81}{2} \pi$$

وحدة الحجم هي  $\frac{1}{3} \text{ cm}^3$ .

و بالتالي  $V_1 = \frac{27}{2} \pi \text{ cm}^3$  أي  $V_1 \approx 42,412 \text{ cm}^3$ .



حساب الحجم  $V_2$ .

لدينا  $V_2 = \int_0^3 S(t) dt$

$$= \int_0^3 9\pi^2 dt = \left[ (9\pi^2 t) \right]_0^3$$

$$= 9\pi^2 \times 3 = 27\pi^2$$

وحدة الحجم هي  $\frac{1}{3} \text{ cm}^3$ .

إذن  $V_2 = 2\pi^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 \text{ cm}^3 = 3\pi^2 \text{ cm}^3$

و بالتالي  $V_2 \approx 29,609 \text{ cm}^3$ .

تمرين 1

- $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي :  $f(x) = x + \ln|x| + e^{-x}$  و  $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المسنوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (الوحدة 1cm)
1. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
  2. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .
  3. أثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين مختلفين  $x_1$  و  $x_2$  حيث  $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$ .
  4. عين معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  عند النقطة  $A$  فاصلتها 1.
  5. ارسم  $(\mathcal{C}_f)$ .
  6.  $(D)$  هو المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  و  $\lambda$  عدد حقيقي أكبر تماما من 1. احسب المساحة  $A(\lambda)$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ ، والمستقيم  $(D)$  والمستقيمين ذوي المعادلتين  $x = \lambda$  و  $x = 1$ . احسب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ . يعطي  $\ln 2 \approx 0,69$  ؛  $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,65$ .

حل

1. دراسة تغيرات الدالة  $f$ .  
 $f$  معرفة على  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ . (أي على  $\mathbb{R}^*$ ).  
 $f$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$ .  
ومن أجل كل عدد  $x$  يختلف عن 0 :  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - e^{-x}$ .  
دراسة إشارة  $f'(x)$  على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$ .  
إذا كان  $x < 0$  فإن  $-x > 0$  وبالتالي  $e^{-x} > 1$ .  
بما أن  $1 + \frac{1}{x} < 1$  فإن  $1 + \frac{1}{x} - e^{-x} < 0$  أي على المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) < 0$ .  
وبالتالي الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]0; +\infty[$ .  
إذا كان  $x > 0$  فإن  $-x < 0$  وبالتالي  $e^{-x} < 1$ .  
بما أن  $1 + \frac{1}{x} > 1$  فإن  $1 + \frac{1}{x} - e^{-x} > 0$  أي على المجال  $]0; +\infty[$ .  
وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]0; +\infty[$ .  
.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .  
.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x| = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ . إذن توجد حالة عدم التعيين.  
لدينا من أجل  $x < 0$  :  $f(x) = x + \ln(-x) + e^{-x} = -x \left( -1 + \frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{e^{-x}}{-x} \right)$ .  
عندما  $x \rightarrow -\infty$  فإن  $-x \rightarrow +\infty$  وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ .

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ -x \left( -1 + \frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{e^{-x}}{-x} \right) \right] = +\infty$   
 من أجل  $x > 0$  لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$   
 إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x + e^{-x}) = +\infty$  بالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ↗ $+\infty$

• جدول التغيرات

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (أي محور الترتيب)

مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .

إذن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل فرع قطع مكافئ منحاه  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\ln|x|}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = -\infty$

محور الترتيب.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = +\infty$

\* إذن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل فرع قطع مكافئ منحاه المستقيم ذو المعادلة  $y = x$ .

تحديد الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  والمستقيم ذي المعادلة  $y = x$  بجوار  $+\infty$ .

لدينا من أجل كل عدد  $x$  أكبر تماما من 1 :  $\ln x + e^{-x} > 0$  أي  $f(x) - x > 0$

وبالتالي  $(\mathcal{C}_f)$  يقع فوق المستقيم ذي المعادلة  $y = x$  على المجال  $[1; +\infty[$ .

3. الدالة  $f$  معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $\left[ \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$  و  $f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا  $x_1$  حيث  $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$ .

$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,413$  و  $f\left(\frac{1}{4}\right) \approx -0,357$  (إستعمال حاسبة)

وبالتالي  $(\mathcal{C}_f)$  يقطع محور الفواصل في النقطة فاصلتها  $x_1$  حيث  $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$ .

لدينا كذلك  $f$  معرفة و مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $\left[ -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right]$ .

$f\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0,456$  و  $f\left(-\frac{1}{4}\right) \approx -0,358$  (باستعمال حاسبة)

و  $f\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$  إذن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_2$  حيث  $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$ .

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها  $x_2$  حيث  $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$

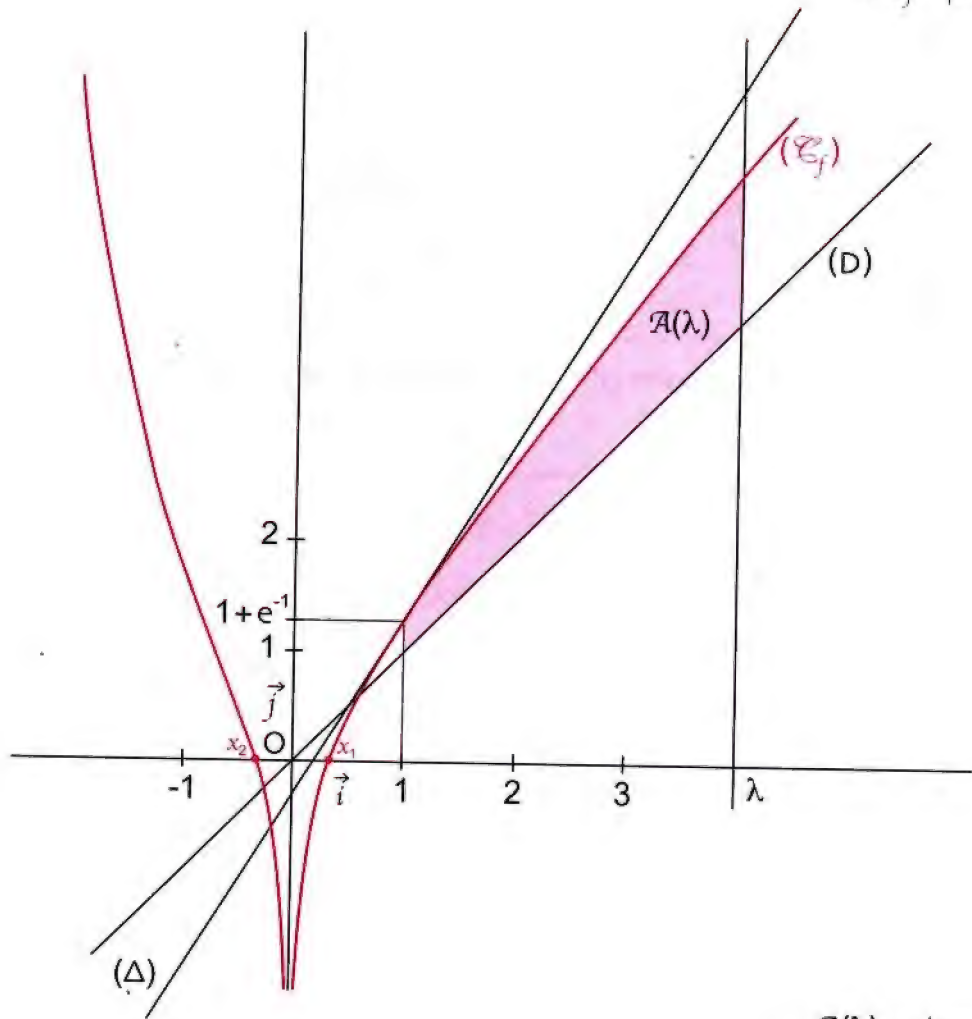
4. معادلة المماس  $(\Delta)$  عند النقطة  $A$  التي فاصلتها 1.

لدينا  $f(1) = 1 + \frac{1}{e}$  :  $f'(1) = 2 - \frac{1}{e}$

معادلة  $(\Delta)$  هي  $y = \left(2 - \frac{1}{e}\right)x - 1 + \frac{2}{e}$



5. رسم  $(\mathcal{E}_f)$ .



6. حساب  $A(\lambda)$

على المجال  $[1; +\infty[$  :  $f(x) - x > 0$  (لأن  $\ln x \geq 0$  و  $e^{-x} > 0$ ).

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda [f(x) - x] dx = \int_1^\lambda (\ln x + e^{-x}) dx \quad \text{إذن}$$

$$= \int_1^\lambda \ln x dx + \int_1^\lambda e^{-x} dx = [x \ln x - x]_1^\lambda + [-e^{-x}]_1^\lambda$$

$$= \lambda \ln \lambda - \lambda - e^{-\lambda} + 1 + \frac{1}{e} = \lambda \left[ \ln \lambda - 1 - \frac{1}{\lambda e^\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda e} \right]$$

$$A(\lambda) = \left( \lambda \ln \lambda - \lambda - e^{-\lambda} + 1 + \frac{1}{e} \right) \text{ cm}^2 \quad \text{إذن}$$

حساب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ .

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left[ \ln \lambda - 1 - \frac{1}{\lambda e^\lambda} + \frac{1}{\lambda e} + \frac{1}{\lambda} \right] = +\infty$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$$

إذن

## تمرين 2

- $g$  هي الدالة المعرفة بـ  $g(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ .  
 (E) المنحنى الممثل للدالة  $g$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
1. عين مجموعة التعريف  $D$  للدالة  $g$ .
  2. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$ ،  $g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$ .
  3. ادرس تغيرات الدالة  $g$ .
  4. ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة للمنحنى (E).
  - حدد الوضع النسبي للمنحنى (E) و المستقيم المقارب المائل ( $\Delta$ ).
  5. ارسم المنحنى (E) في المعلم السابق.
  6.  $a$  عدد حقيقي أكبر تماما من 4.  
 احسب المساحة  $S(a)$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (E) المستقيم المقارب ( $\Delta$ ) و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = 4$ .  
 ما هي نهاية هذه المساحة لما يؤول  $a$  إلى  $+\infty$  ؟

حل

$$D = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[.$$

$$x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-1)^2 + 3(x-1) + 1}{(x-1)^2}; \quad 1. \text{ من أجل كل عدد } x \text{ يختلف عن } 1.$$

$$= \frac{x^3}{(x-1)^2} = g(x)$$

$$g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \quad ; \quad D \text{ من } x \text{ حقيقي}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad .3$$

$$\lim_{x \searrow 1} g(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \nearrow 1} g(x) = +\infty$$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]1; +\infty[$  و  $]-\infty; 1[$

$$g'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \quad ; \quad D \text{ من } x \text{ حقيقي}$$

إشارة  $g'(x)$  على  $\mathbb{R} - \{0\}$  ملخصة

$x$	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	+	○	+		-	○	+

في الجدول التالي

## تمارين و حلول نموذجية

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي :

$x$	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	+	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$\frac{27}{4}$	$+\infty$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  :  $g(x) - (x + 2) = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x + 2)] = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (x + 2)] = 0$

بالتالي المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + 2$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  :  $g(x) - (x + 2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$

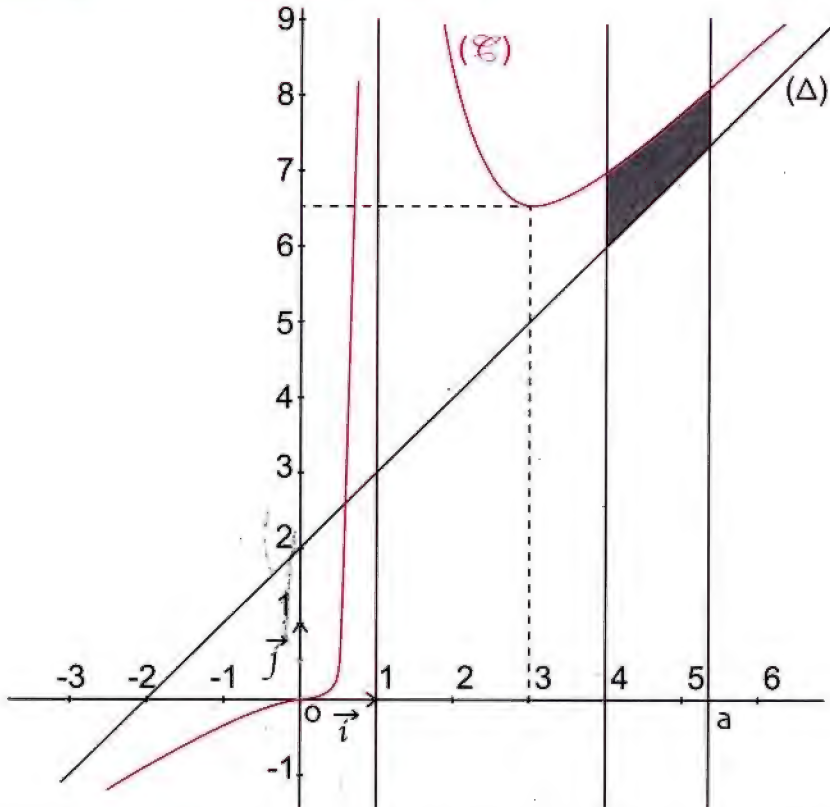
إشارة العبارة  $g(x) - (x + 2)$  والوضع

النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  والمستقيم  $(\Delta)$

ملخصة في الجدول المقابل

$x$	$-\infty$	1	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$g(x) - (x + 2)$	-	-	0	+
الوضع النسبي	( $\mathcal{C}$ ) تحت ( $\Delta$ )	( $\Delta$ ) يقطع ( $\mathcal{C}$ )	( $\mathcal{C}$ ) فوق ( $\Delta$ )	( $\Delta$ )

5. رسم المنحنى  $(\mathcal{C})$ .





6. حساب المساحة  $S(a)$ .

لدينا  $g(x) - (x + 2) > 0$  على المجال  $[4; +\infty[$ .

$$S(a) = \int_4^a [g(x) - (x + 2)] dx \quad \text{إذن}$$

$$= \int_4^a \left[ \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \left[ 3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} \right]_4^a$$

$$= 3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right) - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{3}$$

$$S(a) = 3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right) - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{3} \quad \text{إذن}$$

لدينا  $\lim_{a \rightarrow +\infty} 3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right) = +\infty$  و  $\lim_{a \rightarrow +\infty} -\frac{1}{a-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$  إذن  $\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) = +\infty$ .

## مسألة

### الجزء الأول

$g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1. عين نهايتي  $g$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$ .

2. ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  و انجز جدول تغيراتها.

3. بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

4. ادرس إشارة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

### الجزء الثاني

$f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي  $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$

( $\mathcal{E}$ ) هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j}; 0)$ .

1. ادرس إشارة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

2. عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$ .

3. احسب  $f'(x)$  حيث  $f'$  هي الدالة المشتقة للدالة  $f$ . تحقق أن  $f'(x)$  و  $g(x)$  لهما نفس الإشارة.

4. استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  و انجز جدول تغيراتها.

5. أ) برهن أن  $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$ .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $h$  المعرفة على المجال  $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$  كما يلي  $h(x) = \frac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$ .

ج) إنطلاقا من حصر العدد  $\alpha$  المحصل عليه في الجزء الأول ، أعط حصر للعدد  $f(\alpha)$ .

د) برهن أن المستقيم (D) ذا المعادلة  $y = 2x - 5$  مستقيم مقارب للمنحنى ( $\mathcal{E}$ ) بجوار  $+\infty$ .

حدد الوضع النسبي للمنحنى ( $\mathcal{E}$ ) و المستقيم (D).

## تمارين و حلول نموذجية

6. ارسم المستقيم (D) و المنحنى ( $\mathcal{C}$ ) في المعلم ( $O; \vec{i}, \vec{j}$ ) (الوحدة 2cm).
7.  $\lambda$  عدد حقيقي أكبر تماما من  $\frac{5}{2}$ .
- عين المساحة  $A(\lambda)$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى ( $\mathcal{C}$ )، محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = \lambda$  و  $x = 0$ . احسب نهاية  $A(\lambda)$  لما يؤول  $\lambda$  إلى  $+\infty$ .

حل

الجزء الأول

الدالة  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $g(x) = 2e^x + 2x - 7$ .

1. حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 7) = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

و لدينا أيضا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7) = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2. الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  (لأنها مجموع دوال قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$ )

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) = 2e^x + 2$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^x > 0$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $2e^x + 2 > 0$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) > 0$

إذن الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. الدالة  $g$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  إذن  $g$  مستمرة على المجال  $[0; 1]$ .

الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  إذن  $g$  متزايدة تماما على المجال  $[0; 1]$ .

لدينا  $g\left(\frac{1}{2}\right) = -2,7$  و  $g(1) = 2e + 2 - 7$  أي  $g(1) \approx 0,44$  إذن  $g(1) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

بما أن  $g$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  و  $g(1) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا واحدا  $\alpha$  حيث  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

4. دراسة إشارة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

إشارة  $g(x)$  ملخصة في الجدول التالي

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

## الجزء الثاني

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$ .

1. دراسة إشارة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

إشارة  $f$  ملخصة في الجدول التالي

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x - 5$	-	-	0	+
$1 - e^{-x}$	-	0	+	+
$g(x)$	+	0	-	+

2. تعيين  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 5) = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا أيضا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5) = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

3. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = 2 + (2x - 7)e^{-x}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = \frac{2e^x + 2x - 7}{e^x}$

\* وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

بما أن  $e^x > 0$  على  $\mathbb{R}$  فإن  $f'(x)$  و  $g(x)$  لهما نفس الإشارة.

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول التالي

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

4. من جدول إشارة  $f'(x)$  ينتج أن

الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]-\infty; \alpha]$  و متزايدة على المجال  $[\alpha; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  يكون كالآتي

لدينا  $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

5. أ) البرهان على أن  $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$

نعلم أن  $g(\alpha) = 0$  أي  $2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0$  ومنه  $e^{\alpha} = \frac{7}{2} - \alpha$

لدينا  $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$  أو  $f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha}}\right)$

و بالتالي  $f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - \frac{1}{\frac{7}{2} - \alpha}\right)$  بعد التبسيط ينتج أن  $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$



## تمارين و حلول نموذجية

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة  $h$  على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}]$ .

$$h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7} \quad \text{لدينا}$$

الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}]$ .

$$h'(x) = \frac{(2x-5)(4x-18)}{(2x-7)^2} \quad ; \quad ]-\infty; \frac{5}{2}] \quad \text{من } x \text{ أجل كل عدد}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	-	+

إشارة  $h'(x)$  على  $\mathbb{R} - \{\frac{7}{2}\}$

ملخصة في الجدول المقابل

ينتج أن  $h'(x) \geq 0$

على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}]$  و بالتالي الدالة  $h$  متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}]$ .

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7} \quad \text{نعلم أن}$$

$$f(\alpha) = h(\alpha) \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

الدالة  $h$  متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}]$  و  $\alpha$  ينتمي إلى هذا المجال

$$\text{إذن } h(0) < h(\alpha) < h\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{حيث } h(0) = -\frac{25}{7} \quad \text{و} \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{3}$$

$$\text{بما أن } f(\alpha) = h(\alpha) \quad \text{و} \quad -\frac{25}{7} < h(\alpha) < -\frac{8}{3}$$

$$\text{إذن } -\frac{25}{7} < f(\alpha) < -\frac{8}{3} \quad \text{أو} \quad -3,57 < f(\alpha) < -2,67$$

(د) لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x-5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(2x-5)e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{2x-5}{-e^x} \right) \right] = 0$$

ينتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = 2x - 5$  مستقيم مقارب للمنحنى (E) بجوار  $+\infty$ .

تحديد الوضع النسبي للمنحنى (E) و المستقيم (D).

$$\text{لذلك ندرس إشارة } f(x) - (2x-5) \quad \text{لدينا} \quad f(x) - (2x-5) = -\frac{2x-5}{e^x}$$

إشارة  $f(x) - (2x-5)$  ملخصة في الجدول المقابل.

$x$	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x-5$	-	0	+
$f(x) - (2x-5)$	+	0	-

من الجدول السابق ينتج أن

(E) تحت (D) على المجال  $[\frac{5}{2}; +\infty[$

(E) فوق (D) على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}]$

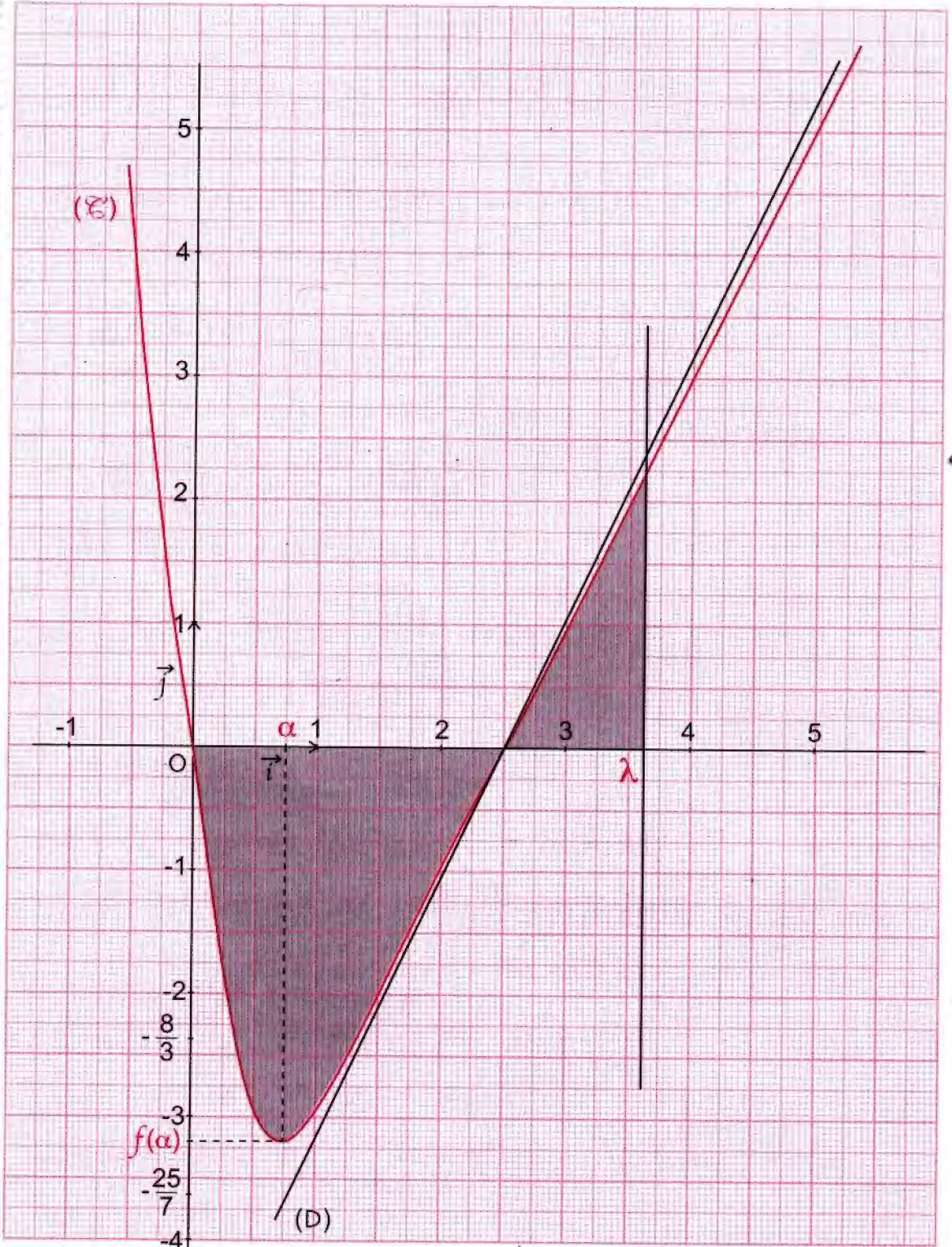
(E) يقطع (D) في النقطة ذات الفاصلة  $\frac{5}{2}$ .



3. رسم (E) و (D).

الدالة  $f$  تقبل قيمة صغرى  $f(\alpha)$  عند  $\alpha$ .

(E) يقطع محور الفواصل في النقطة 0 والنقطة ذات الفاصلة  $\frac{5}{2}$ .



7. الدالة  $f$  سالبة على المجال  $\left[0; \frac{5}{2}\right]$  و موجبة على المجال  $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right]$

$$A(\lambda) = -\int_0^{\frac{5}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} f(x) dx \quad \text{إذن}$$

حساب التكاملين السابقين باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$$A(\lambda) = -\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x}) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x}) dx$$

$$\text{نضع } u(x) = 2x-5 \text{ و } v'(x) = 1-e^{-x}$$

الدالة  $u$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و الدالة  $v$  مستمرة على  $\mathbb{R}$

$$\text{إذن } u'(x) = 2 \text{ و } v(x) = x + e^{-x}$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = \left[(2x-5)(x+e^{-x})\right]_0^{\frac{5}{2}} - \int_0^{\frac{5}{2}} 2(x+e^{-x}) dx$$

$$= \left[(2x-5)(x+e^{-x}) - (x^2 - 2e^{-x})\right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$= \left[(2x-3)e^{-x} + x^2 - 5x\right]_0^{\frac{5}{2}} = 2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = 2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4} \quad \text{ينتج أن}$$

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = \left[(2x-5)(x+e^{-x}) - (x^2 - 2e^{-x})\right]_{\frac{5}{2}}^{\lambda}$$

$$= \left[(2x-3)e^{-x} + x^2 - 5x\right]_{\frac{5}{2}}^{\lambda}$$

$$= (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}$$

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4} \quad \text{ينتج أن}$$

$$A(\lambda) = -\left(2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}\right) + (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4} \quad \text{إذن}$$

$$= (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2}$$

$$\text{و بالتالي } A(\lambda) = 4 \left[ (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2} \right] \text{ cm}^2$$

• حساب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left( \lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2} \right) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (2\lambda-3)e^{-\lambda} = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\text{إذن } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$$



## تمارين و مسائل

5. عين ثلاثة أعداد حقيقية  $\alpha$ ،  $\beta$  و 8

حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 0 و -1

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \frac{8}{x+1}$$

احسب عندئذ التكامل  $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$

6.  $x$  عدد حقيقي و  $I_1$  و  $I_2$  هما التكاملان

التاليان :

$$I_2 = \int_0^x \sin^2 t dt \quad \text{و} \quad I_1 = \int_0^x \cos^2 t dt$$

1. احسب  $I_1 + I_2$  و  $I_1 - I_2$

2. استنتج  $I_1$  و  $I_2$

3. تحقق من صحة نتائج ② بالتعبير عن  $\cos^2 t$

و  $\sin^2 t$  بدلالة  $\cos 2t$ .

### استعمال علاقة شال

7. احسب التكاملات التالية :

$$\int_{-2}^4 |x^2 - 4| dx \quad ; \quad \int_{-1}^3 |x - 2| dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left| 2 - \frac{2}{x} \right| dx \quad ; \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$$

8. 1. احسب التكاملين التاليين :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^2 (2t + 1) dt \quad \text{و} \quad \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2t - 1) dt$$

2. استنتج حساب التكامل التالي :  $\int_{-1}^2 |2t + 1| dt$

### استعمال إيجابية التكامل

9. 1. نقبل أن من أجل كل عدد حقيقي  $t$  موجب

$$\text{تماما، } \ln t \leq t - 1.$$

استنتج، بدون حساب، إشارة التكامل

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt \text{ حسب قيم العدد } x \text{ الموجب تماما.}$$

2. تحقق أن الدالة  $t \mapsto \frac{1}{2} t^2 - \ln t$

هي دالة أصلية للدالة  $t \mapsto t - 1 - t \ln t$

على المجال  $]0; +\infty[$ .

استنتج حساب التكامل  $\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt$

## حساب تكاملات باستعمال دوال أصلية

1. احسب التكاملات التالية :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad ; \quad \int_2^4 \frac{1}{x} dx \quad ; \quad \int_{-1}^2 (x^2 + x) dx$$

$$\int_{-3}^{-1} (t + 3)^3 dt \quad ; \quad \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad ; \quad \int_{-3}^{-1} \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cos^3 \theta d\theta \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos \left( \frac{1}{2} x + \frac{\pi}{2} \right) dx$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{4 - x^2} dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{\cos x} dx$$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \quad ; \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$$

### استعمال خاصية الخطية

2.  $f$  دالة معرفة على المجموعة  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$\text{كما يلي : } f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$$

1. أثبت أنه يوجد عدداً حقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$

حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$  :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x - 2} + \frac{\beta}{x + 2}$$

2. استنتج التكامل  $\int_0^1 f(x) dx$

3. 1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

من  $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$  :

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{4(x - 3)} - \frac{1}{4(x + 1)}$$

2. احسب  $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$

4. 1. أوجد عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  حيث من

أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 0\}$  :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2. احسب التكامل  $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

## تمارين و مسائل

### حساب المساحات

**13** المستوي منسوب إلى معلم متعامد

$$\text{و متجانس } (O; \vec{i}, \vec{j}) . \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 5\text{cm}$$

1. ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  المعرفة على

$$\mathbb{R} \text{ كما يلي : } f(x) = x - x^3 .$$

2. احسب بـ  $\text{cm}^2$  : مساحة الحيز المستوي المحدود

بالمنحنى  $(\mathcal{C})$ ، محور الفواصل و المستقيمين ذوي

$$\text{المعادلتين } x = 0 \text{ و } x = 1 .$$

**14** 1. ارسم المنحنيين  $(\mathcal{C}_f)$  و  $(\mathcal{C}_g)$  المثلين

$$\text{للدالتين } f \text{ و } g \text{ المعرفتين كما يلي : } f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{و } g(x) = e^{x-1} \text{ في المستوي المنسوب إلى المعلم}$$

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ المتعامد و المتجانس.}$$

2. احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنيين

$(\mathcal{C}_f)$  و  $(\mathcal{C}_g)$  و المستقيمين ذوي المعادلتين

$$x = e \text{ و } x = 1 .$$

**15**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = xe^{-x} \text{ و } a \text{ عدد حقيقي موجب تماما.}$$

1. ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{الوحدة } 4\text{ cm} .$$

2. احسب مساحة الحيز  $\mathcal{A}(a)$  للمستوي المحدود

بالمنحنى  $(\mathcal{C})$ ، محور الفواصل و المستقيم ذوي

$$\text{المعادلتين } x = 0 \text{ و } x = a .$$

3. احسب نهاية  $\mathcal{A}(a)$  عندما يؤول  $a$  إلى  $+\infty$ .

### حساب القيمة المتوسطة لدالة

**10** في كل حالة من الحالات التالية، احسب القيمة

المتوسطة  $u$  للدالة  $f$  بين  $a$  و  $b$ .

$$1. \quad b = 1, \quad a = 0 : f(x) = (x - 2)e^x$$

$$2. \quad b = 0, \quad a = -\frac{\pi}{2} : f(x) = x \cos x + \sin x$$

$$3. \quad b = e, \quad a = 1 : f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \ln x$$

$$4. \quad b = \pi, \quad a = 0 : f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$5. \quad b = 16, \quad a = 1 : f(x) = \sqrt{x}$$

$$6. \quad b = 3, \quad a = -3 : f(x) = x^2 - 9$$

$$7. \quad b = \pi, \quad a = 0 : f(x) = \cos^2 x$$

$$8. \quad b = \pi, \quad a = 0 : f(x) = \sin^2 x$$

### المكاملة بالتجزئة

**11** احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة

بالتجزئة.

$$\int_0^1 (3 - t) e^t dt \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$$

$$\int_0^{\pi} (-x + 3) \cos x dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} (3x + 2) \sin x dx$$

$$\int_1^x \ln t dt \quad ; \quad \int_1^x t \ln t dt$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad ; \quad \int_0^2 x e^x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x - 1) \sin(2x^2 - x) dx \quad ; \quad \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt$$

**12** احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة

بالتجزئة مرة واحدة أو أكثر.

$$\int_0^1 (3t^2 - t + 1) e^t dt \quad ; \quad \int_0^1 t^2 e^t dt$$

$$\int_0^{\pi} e^t \cos t dt \quad ; \quad \int_0^1 t^2 e^{3t} dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} e^t \sin t dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t dt \quad ; \quad \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$$

## تمارين و مسائل

### حساب حجم مخروط الدوران

- 16 مخروط رأسه A و محوره  $(Oz)$  و قاعدته القرص الذي مركزه O و ارتفاعه  $h$ . (الشكل) احسب حجم هذا المخروط علما أن نصف قطر قاعدته هو  $R > 0$  و  $OH = \frac{R}{2}$ .
- 

### مسائل

- 17 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  : الوحدة 1 cm.
- 1 ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  على المجموعة  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ .
- 2 احسب  $\int_2^3 \ln(x-1) dx$ .
- 3 احسب بنفس الكيفية  $\int_2^3 \ln(x+1) dx$ .
- 4 احسب مساحة الحيز A المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$  و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x=2$  و  $x=3$ .

- 18  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

- $(\mathcal{C})$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (الوحدة هي 1 cm).
- 1 ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

- 2 احسب مساحة الحيز المستوي A المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$  و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x=1$  و  $x=e^2$ .

- 19  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$$

- $(\mathcal{C}_f)$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- m عدد حقيقي حيث  $m \geq 1$ .

$$\int_1^m |2x - f(x)| dx \text{ إلى التكامل}$$

- 1 احسب  $A(m)$  باستعمال المكاملة بالتجزئة.

- 2 احسب، إن وجدت، نهاية  $A(m)$

عندما  $m$  يؤول إلى  $+\infty$ .

- 20  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = (2x-1)e^{-2x}$$

- $(\mathcal{C}_f)$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب

- إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(الوحدة 2 cm).

- 1 ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

- 2 ارسم المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  في المعلم السابق.

- 3  $\lambda$  عدد حقيقي أكبر تماما من  $\frac{1}{2}$

و  $A(\lambda)$  مساحة الحيز المستوي المحدود

بالمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  و محور الفواصل و المستقيمين

ذوي المعادلتين  $x=\lambda$  و  $x=\frac{1}{2}$ .



## تمارين و مسائل

• بواسطة المكاملة بالتجزئة، احسب المساحة  $A(\lambda)$  بدلالة  $\lambda$ .

• احسب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ .

4. • نعتبر الدالتين  $h$  و  $H$  المعرفتين على  $\mathbb{R}$

$$h(x) = (2x + 1)^2 e^{-4x} \quad \text{كما يلي :}$$

$$H(x) = \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right) e^{-4x} \quad \text{و}$$

• يبين أن الدالة  $H$  هي دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$ .

5. • ليكن  $S$  الحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$

ومحور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x = \frac{1}{2}.$$

يرمز  $v$  إلى حجم الجسم المولد من دوران الحيز  $S$  حول محور الفواصل.

نذكر أن  $v$  معبر عنه كما يلي:  $v = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx$

• عين القيمة المضبوطة للحجم  $v$  بواسطة وحدة

الحجوم ثم قيمة مقربة للحجم  $v$  إلى  $10^{-3}$ .

**21** •  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x \ln |x| \quad \text{إذا كان } x \in \mathbb{R}^* \quad \text{و} \quad f(0) = 0.$$

1. • هل الدالة  $f$  مستمرة عند العدد 0 ؟

هل هي قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

2. • ادرس تغيرات الدالة  $f$  و ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$

الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

3. • باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب المساحة  $A$

للحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$  ومحور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = \frac{1}{e}$  و  $x = 1$ .

**22** • لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  كما يلي :

$$f(x) = x \ln x \quad \text{إذا كان } x \in ]0 ; +\infty[ \quad \text{و} \quad f(0) = 0.$$

1. • ادرس استمرارية الدالة  $f$  و قابلية اشتقاقها على

المجال  $]0 ; +\infty[$ .

2. • ادرس تغيرات الدالة  $f$  و ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$

الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

3. •  $t$  عدد حقيقي من المجال  $]0 ; 1]$ .

احسب، باستعمال المكاملة بالتجزئة، المساحة

$A(t)$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$

و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$$x = t \quad \text{و} \quad x = 1.$$

احسب  $\lim_{t \rightarrow 0} A(t)$ .

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation

## حلول التمارين و المسائل

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin(x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} = -2 \quad 15$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5} \quad 16$$

17  $x = 1$  هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب.

$y = 1$  هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل.

18  $x = 1$  هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب.

$y = x + 2$  هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

19  $y = x + 1$  هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

20  $x = 5$  هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب. المنحنى ( $\mathcal{C}$ ) يقبل فرع قطع مكافئ بجوار  $+\infty$  و  $-\infty$ .

21  $x = -1$  هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي

محور الترتيب. المنحنى ( $\mathcal{C}$ ) يقبل منحنى تقاربيا باتجاه المستقيم ذي المعادلة  $y = x$ .

22 المنحنى ( $\mathcal{C}$ ) يقبل منحنى تقاربيا باتجاه المستقيم ذي المعادلة  $y = x$  بجوار  $+\infty$ .

23 المنحنى ( $\mathcal{C}$ ) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين معادلتهما  $y = x$  و  $y = -x$ .

24 المنحنى ( $\mathcal{C}$ ) يقبل منحنى تقاربيا و هو منحنى المستقيم ذي المعادلة  $y = \sqrt{2}x$

و منحنى و المستقيم ذي المعادلة  $y = -\sqrt{2}x$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1.1 \quad 25$$

2. إذن ( $\mathcal{C}$ ) لا يقبل مستقيما مقاربيا بجوار  $+\infty$ .

### النهايات - الإستمرارية

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 3x) = 0 \quad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0 \quad 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( \cos \frac{1}{x} - 2 \right) = -\infty \quad 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1 \quad 6$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$$

7  $n \leq E(x) < n+1$  حيث  $n$  هو الجزء الصحيح للعدد  $x$ .

$$\frac{n}{x} \leq \frac{E(x)}{x} < \frac{n+1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x} = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+5} = \frac{4}{7} \quad 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^2 + 6x + 9}{2x + 3} = \frac{9}{2} \quad 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = 1 \quad 10$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x-5}{x+1} - \frac{\sin x}{x} \right) = 3 \quad 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \quad 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 \quad 14$$



## حلول التمارين والمسائل

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -1 \quad (26)$$

إذن  $f$  مستمرة عند 1.

$$(27) \quad f \text{ ليست معرفة عند العدد } 0 \text{ إذن } f$$

ليست مستمرة عند العدد 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = f(0) \quad (28)$$

إذن  $f$  مستمرة عند العدد 0.

$$(29) \quad f \text{ ليست معرفة عند } 0. \text{ إذن } f \text{ ليست}$$

مستمرة عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

$f$  مستمرة عند العدد 0 عن اليمين وعن اليسار.

$$(30) \quad 1. \quad f \text{ معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على } \mathbb{R}.$$

$$2. \quad f \text{ مستمرة و متزايدة تماما على المجال } [0; 1]$$

و  $f(0) \times f(1) < 0$  إذن المعادلة  $2x^3 + 5x - 4 = 0$  تقبل حلا واحد في المجال  $]0; 1[$ .

$$\text{لدينا } f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ و } f\left(\frac{3}{4}\right) > 0.$$

$$\text{الحل } x_0 \text{ ينتمي إلى المجال } \left] \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right[.$$

$$(31) \quad 1. \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة و مستمرة و متزايدة تماما}$$

على  $\mathbb{R}^+$  و متناقصة تماما على  $\mathbb{R}^-$ .

$$2. \quad f \text{ مستمرة و متزايدة تماما على المجال } [0; 1]$$

و  $f(0) \times f(1) < 0$  إذن المعادلة  $x^6 + x^2 - 1 = 0$  تقبل حلا واحد في المجال  $]0; 1[$ .

$$\text{لدينا } f(1) > 0 \text{ و } f\left(\frac{3}{4}\right) < 0.$$

$$(32) \quad 1. \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة و مستمرة على } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$f$  متزايدة تماما على  $]-\infty; -1[$  و  $]1; +\infty[$ .

$f$  متناقصة تماما على  $[-1; 1]$ . 136

$$2. \quad f \text{ متناقصة تماما على } [-1; 1] \text{ و مستمرة على}$$

$$[-1; 1] \text{ و } f(-1) \times f(1) < 0$$

إذن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا واحدا في المجال  $] -1; 1[$ .

$$(33) \quad 1. \quad f \text{ معرفة على } ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$$

$$\text{نعتبر الدالة } g \text{ حيث } g(x) = f(x) - 2$$

$g$  مستمرة على  $]-\infty; -1[$  و  $]-1; +\infty[$ .

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}$$

$g$  متزايدة على  $]-\infty; -2[$  و  $]0; +\infty[$

$g$  متناقصة على  $]-2; -1[$  و  $]0; -1[$ .

$$2. \quad g \text{ معرفة، مستمرة و متزايدة تماما على } [2; 3]$$

$$\text{و } g(2)g(3) < 0$$

إذن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا واحد في  $]2; 3[$

بالتالي المعادلة  $f(x) = 2$  تقبل حلا واحد في  $]2; 3[$ .

$$(34) \quad \text{لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي :}$$

$$f(x) = x - \cos x : f'(x) = 1 + \sin x$$

الدالة  $f$  معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

إذن المعادلة تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$ .

و بالتالي المعادلة  $\cos x = x$  تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$ .

$$(35) \quad \text{لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي :}$$

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$$

الدالة  $f$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$$

$$f \text{ متناقصة على } \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[ \text{ و } \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$$

و متزايدة على  $\left] \frac{1}{3}; 1 \right[$ .

لدينا  $f$  معرفة و مستمرة و متناقصة تماما على

$$[1; 3] \text{ و } f(1) \times f(3) < 0$$

إذن المعادلة تقبل حلا واحد في  $]1; 3[$

40. 1. مجموعة تعريف  $f$  هي  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .

$$\varphi(x) = \frac{2x+4}{(x+1)^2} \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad a = 1$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{2x+4}{(x+1)^2} \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

3.  $x = -1$  هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب.

$y = x + 1$  هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

41. حجم المكعب هو  $x^3$ .

حجم المتوازي المستطيلات هو  $3(3x+4)$ .

حل المعادلة  $x^3 = 3(3x+4)$  في  $\mathbb{R}_+^*$ .

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}_+^*$  كما يلي :

$$f(x) = x^3 - 9x - 12$$

الدالة  $f$  مستمرة  $\mathbb{R}_+^*$ ، متزايدة على  $[\sqrt{3}; +\infty[$

و متناقصة على  $[0; \sqrt{3}]$ .

$$f(4) = 16 \quad \text{و} \quad f(3) = -12$$

$$f(x) = 0 \quad \text{و} \quad f(3) \times f(4) < 0 \quad \text{و بالتالي المعادلة}$$

تقبل حلا واحدا في المجال  $]3; 4]$ .

$$f(3,6) = 2,256 \quad \text{و} \quad f(3,5) = -0,625$$

$$f(3,5) \times f(3,6) < 0$$

إذن الحل  $x$  ينتمي إلى المجال  $]3,5; 3,6]$ .

و بالتالي يكون حجم المكعب يساوي حجم متوازي المستطيلات من أجل قيمة  $x$  حيث

$$3,5 < x < 3,6$$

36. 1.  $f$  معرفة على  $]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$ .

$$c = 19 \quad ; \quad b = -9 \quad ; \quad a = 5$$

$$f(x) = 5x - 9 + \frac{19}{x+2}$$

2.  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور

الترتيب معادلته  $x = -2$  و مستقيم مقارب مائلا

$(\Delta)$  معادلته  $y = 5x - 9$ .

في المجال  $]-\infty; -2[$ ،  $(\mathcal{E}_f)$  تحت  $(\Delta)$ .

في المجال  $]-2; +\infty[$ ،  $(\mathcal{E}_f)$  فوق  $(\Delta)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad m = 0 \quad 37$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad m > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-m)x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - mx}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad 0 < m < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad ; \quad m = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad m > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad m < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad -1 < m < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad m = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad m < -1$$

38. الدالة  $x \mapsto x^2 + x + 1$  مستمرة على

$\mathbb{R}$  و الدالة  $\sin$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  الدالة  $h$  هي

مركب الدالتين  $x \mapsto x^2 + x + 1$  و  $x \mapsto \sin x$ ،

فهي مستمرة على  $\mathbb{R}$ . و بالتالي الدالة  $h$  مستمرة

عند كل عدد حقيقي  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} \quad 39$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$



02 الاشتقاق

1 •  $f$  قابلة للاشتقاق عند 1 و  $f'(1) = 2$ .

2 •  $f$  قابلة للاشتقاق عند 5 و  $f'(5) = \frac{9}{4}$ .

3 •  $f$  قابلة للاشتقاق عند -2 و  $f'(-2) = 192$ .

4 •  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $f'(0) = -1$ .

5 •  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $f'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

6 •  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $f'(0) = -12$ .

7 •  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين و  $f'(0) = 0$ .

8 •  $f$  ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

2 • 1.  $y = 7x - 14$

2 • المنحنى يقبل نصف مماس يوازيان محور الترتيب في النقطة ذات الفاصلة 1 معادلاتهما

$x = 1$  حيث  $x \geq 1$  و  $x = 1$  حيث  $x \leq 1$ .

3 •  $y = 12x - 24$  :  $y = -12x + 24$

4 •  $x = 0$  على المجال  $[0; +\infty[$ .

5 • المنحنى يقبل نصف مماس يوازيان محور

الترتيب في النقطة A فاصلتها 2، معادلاتهما

$x = 2$  حيث  $x \geq 2$  و  $x = 2$  حيث  $x \leq 2$ .

6 • المنحنى يقبل نصف مماس معادلاتهما

$y = 4x - 3$  حيث  $x \geq 1$

$y = 1$  حيث  $x \leq 1$

7 • المنحنى يقبل نصف مماس عن اليمين عند نقطة

فاصلتها -2، يوازي محور الترتيب و معادلته

$x = -2$  حيث  $x \geq -2$ .

3 • 1.  $f'(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^2}$  :  $D' = \mathbb{R} - \{0\}$

2 •  $f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x - 2)^2}$  :  $D' = \mathbb{R} - \{2\}$

3 •  $f'(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 4}{4(1 - x)^2}$  :  $D' = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x + 1)^2} : D' = \mathbb{R} - \{-1\} \cdot 4$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2(x + 1)^2} : D' = \mathbb{R} - \{-1\} \cdot 5$$

$$f'(x) = 2 + \frac{4}{(1 - x)^3} : D' = \mathbb{R} - \{1\} \cdot 6$$

$$f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} : D' = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ \cdot 7$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}(3x - 1)}{2\sqrt{x}} : D' = [0; +\infty[ \cdot 8$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(2 + x)^2} \sqrt{\frac{2 + x}{2 - x}} : D' = ]-2; 2[ \cdot 9$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cos \pi x + \left(\frac{2x + 1}{4}\right) \pi \sin \pi x : D' = \mathbb{R} \cdot 10$$

$$f'(x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} : D' = \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[ \cdot 11$$

$$D' = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cdot 12$$

$$f'(x) = \frac{2(\cos 2x - \sin 2x + 1)}{(1 - \sin 2x)^2}$$

4 •  $f$  مستمرة عند 1.

$f$  قابلة للاشتقاق عند 1 و  $f'(1) = 0$

$$Df = \mathbb{R} - \{0\} \cdot 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + 1} = \frac{1}{2} \cdot 2$$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $g'(0) = \frac{1}{2}$

بما أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 فإنها مستمرة عند 0.

$$f'(x) = 3x^2(1 - x)^2(1 - 2x) : D = \mathbb{R} \cdot 1$$

$f$  متزايدة على  $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$

و متناقصة على  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$



## حلول التمارين والمسائل

**7** دالة ناطقة إذن  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  وقابلة للاشتقاق  $n$  مرة على  $1; +\infty[$  و  $]-\infty; 1[$ .

من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{1\}$  :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

**8** 1.  $f^{(6)}(x) = 0$  :  $n \geq 6$

2. من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$  :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x-1)^{n+1}}$$

3. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f^{(n)}(x) = 2^n \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

**9**  $f''(x) = -9 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$-9 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 9 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

إذن  $f$  حل للمعادلة التفاضلية  $y'' + 9y = 0$ .

**10** 2.

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	0 ↘ -∞	+∞ ↘ -∞	+∞ ↘ 0	

3.  $(T_A): y = -8x + 12$  :  $A\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

4. يكفي إثبات أن من أجل كل عدد  $x$  من  $Df$

$$f(3-x) = -f(x)$$

**11** (أ) 2. جدول تغيرات  $f$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	-∞ ↗ -1	-1 ↘ -2	-2 ↗ +∞	+∞

2.  $f'(x) = 1 - \frac{5}{2\sqrt{x}}$  :  $D = \mathbb{R}_+$

$f$  متزايدة على  $\left[\frac{25}{4}; +\infty\right[$

و متناقصة على  $\left]0; \frac{25}{4}\right]$ .

3.  $D = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x-2)^2}$$

$f$  متزايدة على  $\left]2+\sqrt{3}; +\infty\right[$  و  $\left]-\infty; 2-\sqrt{3}\right]$

$f$  متناقصة على  $\left]2; 2+\sqrt{3}\right]$  و  $\left]2-\sqrt{3}; 2\right[$ .

4.  $f'(x) = -1 + \frac{8}{x^3}$  :  $D = \mathbb{R} - \{0\}$

$f$  متزايدة على  $]0; 2]$

$f$  متناقصة على  $\left]2; +\infty\right[$  و  $\left]-\infty; 0\right[$ .

5.  $f'(x) = 1 + \cos x$  :  $D = \mathbb{R}$

$f$  متزايدة على  $\mathbb{R}$ .

6.  $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x$$

$f$  متناقصة على كل مجال محتوي في  $D$ .

7.  $f'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 12x^2$  :  $D = \mathbb{R}$

$f$  متزايدة على  $\mathbb{R}$ .

8.  $f'(x) = \frac{7}{(x+1)^2}$  :  $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f$  متزايدة على  $]-1; +\infty[$  و  $]-\infty; -1[$ .

9.  $f'(x) = \frac{-7}{(2x-5)^2}$  :  $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

$f$  متناقصة على  $\left]5; +\infty\right[$  و  $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$ .

10.  $f'(x) = 12x^2 - 12x$  :  $D = \mathbb{R}$

$f$  متزايدة على  $\left]0; +\infty\right[$  و  $\left]-\infty; 0\right[$ .

$f$  متناقصة على  $[0; 1]$ .

## حلول التمارين و المسائل

4.  $b \in \mathbb{R} : f(x) = 6\sqrt{x} + b$

5.  $b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\sin 2x + b$

6.  $b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} : f(x) = ax + b$

7.  $c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$

8.  $c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + bx + c$

9.  $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + bx + c$

$c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

10.  $f(x) = -\frac{9}{\pi^2}\sin \frac{\pi}{3}x + bx + c$

$c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

14.  $f''(x) = \frac{2}{(x-a)^3} : f'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2}$

$f'''(x) = \frac{-6}{(x-a)^4}$

2.  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$

3.  $g(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$

$g^{(n)}(x) = \frac{-\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

15.  $h(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 5)$

$h(x) > 0$  من أجل  $x > 1$

$h(x) = 0$  من أجل  $x = 1$

$h(x) < 0$  من أجل  $x < 1$

2.  $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

ب.  $f(x) = x^2 - x + \frac{4}{(x+1)}$

$c = 4 : b = -1 : a = 1$

ج.  $f(x) - g(x) = \frac{4}{x+1}$

2.  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على  $[1,6 ; 1,7]$

و  $f(1,6) f(1,7) < 0$

إذن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا واحد  $\alpha$  حيث

$1,6 < \alpha < 1,7$

ب. 1

x	$-\infty$	-1	$\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	0	+
$g(x)$	0	$+\infty$	$\beta$	0

$\beta = g(\alpha) : 1,6 < \alpha < 1,7$

2.  $(\Delta) : y = -x + 1$

3. نضع  $d(x) = g(x) - (-x + 1) = \frac{(x-1)x^3}{x^3 + 1}$

إذا كان  $0 \leq x \leq 1$  فإن  $d(x) \leq 0$

إذا كان  $-1 < x \leq 0$  فإن  $d(x) \geq 0$

(1 ; 0) حل للجملية  $\begin{cases} y = g(x) \\ y = -x + 1 \end{cases}$

4. معادلة (T) هي  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

12. 1.  $b = 0 : a = 4$

2.  $f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\circ$	+	$\circ$	-
$f(x)$	3			4	
			$\nearrow$		
		$\searrow$		$\searrow$	
		-1			3

(C) يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل

معادلته  $y = 3$

13. 1.  $a \in \mathbb{R} : f(x) = a$

2.  $b \in \mathbb{R} : f(x) = -5x + b$

3.  $b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x + b$



## حلول التمارين والمسائل

### 03 الدوال الأصلية

**1** الدالة  $F$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

1.  $F'(x) = 3x^2 - 1 = f(x)$

إذن  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

2. الدالة  $F$  معرفة وقابلة للاشتقاق

على  $]-1; +\infty[$  و  $F'(x) = \sqrt{x+1} = f(x)$

إذن  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]-1; +\infty[$

3. الدالة  $F$  معرفة وقابلة للاشتقاق

على  $]0; +\infty[$  و  $F'(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right) = f(x)$

إذن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$

على  $]0; +\infty[$

4. الدالة  $F$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

و  $F'(x) = \cos x - x \sin x = f(x)$

إذن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

**2** الدالة  $F : x \mapsto 2 \sin^2 x$

هي دالة أصلية للدالة  $f$  حيث  $f(x) = 2 \sin 2x$

على  $\mathbb{R}$  لأن الدالة  $L$  معرفة وقابلة للاشتقاق

على  $\mathbb{R}$  و  $L'(x) = f(x)$ .

**3** 1.  $F(x) = -\frac{7}{12} + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

2.  $F(x) = 1 + \cos 2x$

3.  $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sin 3x$

4.  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + \frac{7}{2}$

**4** 1. الدوال  $F$  حيث  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  ؛  $c \in \mathbb{R}$

2.  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + c$

3.  $F(x) = -\cos x - 2 \sin x + c$

4.  $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^3 + c$

5.  $F(x) = 4 \sin\left(\frac{x-\pi}{4}\right) + c$

6.  $F(x) = x - \tan x + c$

7.  $F(x) = \frac{1}{5}(x-3)^5 + c$

8.  $F(x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + c$

9.  $F(x) = \frac{2}{3}(x^2+4)^3 + c$

10.  $F(x) = -\frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 + c$

11.  $F(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)^3 + c$

12.  $F(x) = -\frac{1}{(x-3)} + c$

13.  $F(x) = -\frac{1}{\sin x} + c$

14.  $F(x) = \frac{1}{\cos x} + c$

15.  $F(x) = 2\sqrt{x+1} + c$

16.  $F(x) = 2\sqrt{3 + \sin x} + c$

17.  $F(x) = -\sqrt{1-x^2} + c$

18.  $F(x) = x \sin x + c$

19.  $F(x) = \frac{\sin x}{x} + c$

20.  $F(x) = x\sqrt{1+x^2} + c$

**5** 1.  $F(x) = \frac{1}{4} \sin^4 x + c$

2.  $F(x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + c$

3.  $F(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x + c$

4.  $F(x) = \frac{-5}{4(x+5)^4} + c$

5.  $F(x) = x^2 + 3x + c$

6.  $F(x) = \frac{-1}{3(1+x^3)} + c$

7.  $F(x) = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} + c$

**6**  $F'(x) = f(x)$

إذن  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]1; +\infty[$ .

**7**  $F'(x) = f(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

الدوال  $x \mapsto -x^3 + 2x^2 + x - 1 + c$  هي الدوال

الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .



## حلول التمارين والمسائل

### 04 الدوال الأسية

$$e^x e^{-2x} = e^{-x} ; e^{2x} e^{3x} = e^{5x} \quad 1$$

$$(e^x)^{-2} = e^{-2x} ; (e^{3x})^2 = e^{6x} ; e^{1-x} e^{3x+3} = e^{2x+4}$$

$$\frac{e^{-0.2}}{e^{0.2}} = e^{-0.4} ; \frac{e^5}{e^2} = e^3 ; e^{\frac{1}{2}} e^{-2} = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$b = -1 \text{ و } a = 1 \quad 2$$

$$c = -4 ; b = 0 ; a = 1 \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \quad 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1+e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (2xe + 3 - 5e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + x - 5)e^x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} = 0$$

$$f'(x) = 2e^x ; D = \mathbb{R} ; f(x) = 2e^x \quad 5$$

$$f'(x) = -e^{3-x} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^{3-x}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = \sqrt{e^x}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 4x - 2)e^{-x} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x}{(1-e^x)^2} ; D = \mathbb{R}^* ; f(x) = \frac{5e^x - 1}{1-e^x}$$

$$f'(x) = 3e^{3x+1} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^{3x+1}$$

$$f'(x) = 2 \cos 2x e^{\sin 2x} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^{\sin 2x}$$

$$f'(x) = (3x+4)e^x ; D = \mathbb{R} ; f(x) = (3x+1)e^x$$

$$f'(x) = (\sin x + \cos x)e^x ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^x \sin x$$

$$f(x) = e^{-x}(\cos 3x - \sin 3x)$$

$$f'(x) = e^{-x}(-4\cos 3x - 2\sin 3x) ; D = \mathbb{R}$$

$$6 \text{ حل المعادلة } e^x = 1 \text{ هو } 0.$$

$$\text{حلا المعادلة } e^x = e^{25} \text{ هما } 5 \text{ و } -5.$$

$$\text{حلا المعادلة } e^{5x-1} = e^{x^2+5} \text{ هما } 2 \text{ و } 3.$$

$$\text{حلول المعادلة } e^{\sin x} = e^{\cos x} \text{ هي الأعداد } x$$

$$\text{حيث } k \in \mathbb{Z} ; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{حل المعادلة } e^x + 1 = \frac{2}{e^x} \text{ هو } 0.$$

$$c \in \mathbb{R} ; F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + c \cdot 1 \quad 8$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c \quad 2$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + c \quad 3$$

$$F(x) = -\frac{1}{x^2} + c \quad 4$$

$$F(x) = \frac{3}{2x^2} + \sin x + c \quad 5$$

$$F(x) = 12\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c \quad 6$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + c \cdot 7$$

$$F(x) = 2\sqrt{4 + \sin x} \cdot 1 \quad 9$$

2. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

$$c \in \mathbb{R} ; x \mapsto 2\sqrt{4 + \sin x} + c \text{ هي الدوال}$$

$$F(x) = x + \frac{27}{2x^2} \cdot 1 \quad 10$$

$$b = \frac{27}{2} \text{ و } a = 1 \text{ إذن}$$

$$c \in \mathbb{R} ; G(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{27}{2x} + c \cdot 2$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{27}{2x} + 14 \cdot 3$$

$$G(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1) + c \cdot 1 \quad 11$$

$$F(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1) - 1 \cdot 2$$

$$12 \text{ العبارة الخطية لـ } \cos^3 x \text{ و } \cos^3 x$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x \text{ هما}$$

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

$$x \mapsto \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + c \text{ الدوال}$$

هي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

$$x \mapsto -\frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + c \text{ الدوال}$$

هي الدوال الأصلية للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

## حلول التمارين و المسائل

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx = e^\lambda + e^{-\lambda} - 2 \quad .6$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$$

11.  $f(0) = 0$  :  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  . 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$$

$f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  .

2.  $(T) : y = 5x$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$4e^{2x} + e^x - 5$	-	0	+
$f(x) - 5x$	+	0	+

( $\mathcal{C}$ ) فوق ( $T$ ) في المجال  $]-\infty; +\infty[$  .

( $T$ ) يقطع ( $\mathcal{C}$ ) في النقطة  $O(0; 0)$  .

12. 1.  $D = \mathbb{R}$  . 2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  . 3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  . 4.  $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$  .

$f'(x) > 0$  على  $\mathbb{R}$  :  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  .

5. يكفي إثبات أن  $f(x) + f(-x) = 1$  .

6.  $(T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$  .

7.  $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$  (أ) .

ب)  $g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x)$  :  $g(0) = \frac{1}{2} - f(0)$  .

تغيرات  $g$  ملخصة في الجدول التالي

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ج) ( $\mathcal{C}$ ) تحت ( $T$ ) في المجال  $]0; +\infty[$  .

( $\mathcal{C}$ ) فوق ( $T$ ) في المجال  $]0; +\infty[$  .

( $\mathcal{C}$ ) يقطع ( $T$ ) عند النقطة  $A(0; \frac{1}{2})$  .

المعادلة  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$  لا تقبل حلا في  $\mathbb{R}$  .

حل المعادلة  $e^{4x} - e^{2x} = 0$  هو 0 .

حل المعادلة  $e^x + e^{-x} = 2$  هو 0 .

حل المعادلة  $e^{2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$  هو 0 .

حل المعادلة  $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$  هو 0 .

7. مجموعة حلول المتراجحة  $e^x \geq \sqrt{e}$  هي  $[\frac{1}{2}; +\infty[$  .

مجموعة حلول المتراجحة  $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$  هي  $[-3; 2]$  .

مجموعة حلول المتراجحة  $e^{2x} - e^x < 0$  هي  $]0; +\infty[$  .

مجموعة حلول المتراجحة  $e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$  هي  $[0; +\infty[$  .

مجموعة حلول المتراجحة  $e^{4x} + 5e^{2x} - 6 \leq 0$  هي  $]-\infty; 0]$  .

مجموعة حلول المتراجحة  $e^{x^2} e^x < (e^3)^2$  هي  $]-3; 2]$  .

مجموعة حلول المتراجحة  $e^{2x} > e^{x+1}$  هي  $]1; +\infty[$  .

8.  $f(x) = e^{-x}$  :  $F(x) = -e^{-x}$  .

$f(x) = \frac{1}{2} e^{3x} - 5e^{2x}$  :  $F(x) = \frac{1}{6} e^{3x} - \frac{5}{2} e^{2x}$  .

$f(x) = xe^{x^2}$  :  $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$  .

$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$  :  $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$  .

$f(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 3)^2}$  :  $F(x) = \frac{1}{e^x + 3}$  .

9.  $a = 2$  :  $b = -3$  .

10. 1. حل المعادلة  $f(x) = 0$  هو 0 .

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  هو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	2	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

5.  $k < 0$  : المعادلة  $f(x) = k$  تقبل حلا واحدا سالبا .

$k = 0$  : المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا واحدا هو 0 .

$k > 0$  : المعادلة  $f(x) = k$  تقبل حلا واحدا موجبا .



## حلول التمارين والمسائل

3. حسب السؤال 2، لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،

$$f(x) > 0 \text{ أي } \frac{e^x}{e^x - x} > 0$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

4. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{e}{e-1}$	1

6. المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $-\infty$ .

المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $+\infty$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1

3.  $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$  :  $a = 1$  و  $b = -2$

4. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(-x) = -f(x)$

و بالتالي  $f$  فردية على  $\mathbb{R}$ .

5.  $f''$  تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 0

إذن النقطة ذات الفاصلة 0 نقطة إنعطاف  $(\mathcal{C})$ .

6. تنعدم  $y = \frac{1}{2}x$  : (T)

13.  $I_1 = \int_0^1 xe^{-x} dx = -\frac{2}{e} + 1$

2. نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب  $I_{n+1}$ .

و نجد  $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$

3. نستعمل  $I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{5}{e} + 2$

$I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{16}{e} + 6$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

3.  $A(\lambda) = 1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda}$

أو أيضا  $A(\lambda) = 16 [1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda}] \text{ cm}^2$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^\lambda} - \frac{\lambda}{e^\lambda}\right) = 1$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

لدينا  $g(0) = 0$ .

2. ينتج أن  $g(x) \geq 0$  أي  $e^x - x - 1 \geq 0$

و بالتالي  $e^x - x \geq 1$  أي  $0 < \frac{e^x}{e^x - x} \leq e^x$

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\frac{e^x}{e^x - x} > 0$



## حلول التمارين و المسائل

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$0$

. المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $+\infty$ .

. مكافئ بجوار  $-\infty$ .  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع

7. الدالة  $f(x) - 3$  معرفة، مستمرة و متناقصة تماما على  $[0; \pi]$

$$(f(0) - 3)(f(\pi) - 3) < 0 \quad \text{و}$$

إذن المعادلة  $f(x) - 3 = 0$  تقبل حلا واحدا في  $]0; \pi[$ .

أي المعادلة  $f(x) = 3$  تقبل حلا واحدا  $\alpha$  حيث  $0 < \alpha < \pi$ .

### 05 الدوال اللوغاريتمية

$$\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0 \quad \text{1}$$

$$4\ln(\sqrt{2}+1) + 4\ln(\sqrt{2}-1) - 5\ln 2 = -\ln 32$$

$$\frac{\ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)}{2} = \ln \sqrt{2}$$

$$\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1) = 0$$

$$2\ln e^4 = 8 \quad ; \quad 8 - \ln \frac{1}{e} = 9$$

7. في المجال  $]0; +\infty[$ ،  $(T)$  فوق  $(\mathcal{E})$

في المجال  $]0; +\infty[$ ،  $(T)$  تحت  $(\mathcal{E})$  و عند النقطة  $O(0; 0)$ ،  $(T)$  يقطع  $(\mathcal{E})$ .

17. مجموعة التعريف هي  $\mathbb{R}$ .

2. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $1 < 2 + \cos x < 3$  و  $e^{1-x} > 0$  إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $(2 + \cos x)e^{1-x} > 0$  و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f(x) > 0$ .

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) \cdot 3$$

$$= \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \leq \cos x + \sin x \leq \sqrt{2} \quad , \quad x \text{ عدد حقيقي}$$

و بالتالي  $2 - \sqrt{2} \leq 2 + \cos x + \sin x \leq 2 + \sqrt{2}$  أي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$2 + \cos x + \sin x > 0 \quad ; \quad (2 - \sqrt{2} > 0)$$

$$1 \leq 2 + \cos x \leq 3 \quad 4$$

$$e^{1-x} < (2 + \cos x) e^{1-x} < 3e^{1-x} \quad \text{إذن}$$

أي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^{1-x} < f(x) < 3e^{1-x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f'(x) = -(2 + \cos x + \sin x) e^{1-x} \cdot 5$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) < 0$  و بالتالي  $f$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .

## حلول التمارين و المسائل

7 • مجموعة حلول المعادلة

$$\ln(2x+7) = \ln(x-3) \text{ هي } \emptyset$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3) \text{ هي } \{1\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln(x-3) = \ln(x+7) - \ln(x+1) \text{ هي } \{5\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ هي } \{-2; 5\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right) = \ln(x+3) \text{ هي } \{1\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln(x+2) \text{ هي } \{-\frac{4}{3}\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\frac{1}{2}\ln(x-1) + \ln(x+1) = 2 + \ln\sqrt{1+x}$$

$$\text{هي } \{\sqrt{1+e^4}\}$$

$$8 \bullet c = 2 ; b = -11 ; a = 12 \bullet 1$$

$$P(x) = (x+1)(12x^2 - 11x + 2)$$

$$P(x) = 0 \text{ هي } \{-1; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$12(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 9\ln x + 2 = 0$$

$$\text{هي } \left\{\frac{1}{e}; e^{\frac{2}{3}}; e^{\frac{1}{4}}\right\}$$

$$\ln a^2 b^3 = 2\ln a + 3\ln b \quad 2$$

$$6\ln \frac{1}{\sqrt{a^2 b}} = -6\ln a - 3\ln b$$

$$\ln 500 = 2\ln 2 + 3\ln 5 \quad 3$$

$$\ln 6,25 = 2\ln 5 - 2\ln 2 : \ln \frac{16}{25} = 4\ln 2 - 2\ln 5$$

$$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100} = -2\ln 2 - 2\ln 5$$

$$n \geq 1 : n \geq 10 : n \geq 4 : n \leq 9 \quad 4$$

$$5 \bullet \{e^2\} \text{ هي } \ln x = 2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^{-2}\} \text{ هي } \ln x = -2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{\sqrt{e}\} \text{ هي } \ln x = \frac{1}{2} \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^2; -e^2\} \text{ هي } \ln |x| = 2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^2; -e^2\} \text{ هي } \ln x^2 = 4 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^2; -e^2\} \text{ هي } [\ln(x)]^2 = 4 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$6 \bullet \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\ln(1-x) = 2\ln 3 - 3\ln 2 \text{ هي } \{-\frac{1}{8}\}$$

$$\ln(1-x)^2 = 4\ln 2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\text{هي } \{-3; 5\}$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -3\ln 2 \text{ هي } \{-7\} \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\ln\sqrt{1-x} = \frac{1}{2}\ln 3 \text{ هي } \{-2\} \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

## حلول التمارين والمسائل

• مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} 2\ln x + 3\ln y = -2 \\ 3\ln x + 5\ln y = -4 \end{cases}$  هي  $\{(e^2; e^{-2})\}$

• مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \frac{2}{3} \\ x + y = \frac{4}{3} \end{cases}$  هي  $\emptyset$

• مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} 5x + 4y = 12 \\ \ln(x-1) + \ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases}$  هي  $\left\{\left(\frac{9}{5}; \frac{3}{4}\right); \left(\frac{8}{5}; 1\right)\right\}$

• مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} \ln(x^2 - y^2) = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

هي  $\left\{\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)\right\}$

12  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + (\ln x)^2} = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + (\ln x)^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\ln x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2\ln x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} = 1$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} = 1$

13  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - \ln x} = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{1 + x} = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = 0$

؛  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2x-3}{x}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - (\ln x)^2] = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1 + 2e^x}{e^{2x} - 1}\right) = -\infty$

9 • مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(3-x) \leq 0$  هي  $[-2; 3]$

• مجموعة حلول المتراجحة  $\ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) \geq 0$  هي  $\left]-\frac{1}{2}; 0\right]$

• مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(x+2) + \ln(3+x) > 0$  هي  $\left]-\frac{5+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$

• مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(x^2 - 4) > \ln(6x+5)$  هي  $]3 + 3\sqrt{2}; +\infty[$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2\ln 2$  هي  $\left]\frac{5}{2}; 3\right]$

10 • مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1)$  هي  $] -4; +\infty[$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x^2 + 11x + 30) > \ln(x + 14)$

هي  $] -14; -8[ \cup ] -2; +\infty[$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x^2 - 2e^2) \leq \ln x + 1$  هي  $[e\sqrt{2}; 2e]$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0$  هي  $\left]\frac{5}{3}; 3\right]$

11 • مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} x + y = 30 \\ \ln x + \ln y = 3\ln 6 \end{cases}$  هي  $\{(12; 18); (18; 12)\}$

• مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$  هي  $\{(2; 1); (1; 2)\}$



## حلول التمارين والمسائل

$$D = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right)$$

$$b = 5 : a = -2 : D = \mathbb{R} \quad \text{15}$$

$$f(x) = -2 + \frac{5e^x}{2e^x + 1}$$

$$F(x) = -2x + \frac{5}{2} \ln(2e^x + 1) \text{ حيث } F \text{ الدالة}$$

المعرفة على  $\mathbb{R}$  هي دالة أصلية للدالة  $f$ .

$$f(x) = e^x - \frac{4e^x}{e^x + 4} : b = -4 : a = 1 \quad \text{16}$$

الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  حيث  $F(0) = 0$  معرفة

$$F(x) = e^x - 4 \ln(e^x + 4) - 1 + 4 \ln 5 \text{ كما يلي}$$

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2} \text{ إذن } \left( \frac{\sqrt[6]{6} (\sqrt[3]{2})^2 \sqrt{12}}{\sqrt[3]{3^4} \sqrt[3]{6^2}} \right)^6 = \frac{2^9}{3^6} \quad \text{17}$$

$$a = \frac{6^{\frac{1}{6}} \times (2^{\frac{1}{3}})^2 \times 12^{\frac{1}{2}}}{(3^4)^{\frac{1}{3}} [(6^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} : \sqrt[4]{81^3} = 27 : \sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{18}$$

$$\frac{(\sqrt[3]{4})^2 \sqrt[4]{2}}{\sqrt[10]{4^3}} = 2^{\frac{59}{60}} : \frac{\sqrt[5]{4^2} \sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{8}} = 2^{\frac{1}{20}}$$

19

• مجموعة حلول المعادلة  $4^x + 3 \times 2^x + 10 = 0$  هي  $\emptyset$

$$9^x - 3^{x+2} = \frac{3^5}{4} \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\left\{ \frac{\ln 27 - \ln 2}{\ln 3} \right\} \text{ هي}$$

$$D = \left] \frac{1}{5}; +\infty \right[ : f(x) = \ln(5x - 1) \quad \text{14}$$

$$f'(x) = \frac{5}{5x - 1}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{7}{2} \right\} : f(x) = \ln|7 - 2x|$$

$$f'(x) = \frac{-2}{7 - 2x}$$

$$D = ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[ : f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+1)(x-2)}$$

$$D = ]0; +\infty[ : f(x) = x^2 \ln x$$

$$f'(x) = x(1 + 2 \ln x)$$

$$D = \mathbb{R} : f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$D = \mathbb{R} : f(x) = 3x + \ln(1 + e^{-2x})$$

$$f'(x) = 3 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$D = \mathbb{R}^* : f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{4e^{2x}}{e^{4x} - 1}$$

$$f(x) = \ln(4x^2 - 3x - 1)$$

$$D = \left] -\infty; -\frac{1}{4} \right[ \cup ]1; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{8x - 3}{4x^2 - 3x - 1}$$

$$D = ]-1; +\infty[ : f(x) = x^2 \ln(1 + x)$$

$$f'(x) = 2x \ln(1 + x) + \frac{x^2}{1 + x}$$

## حلول التمارين و المسائل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e$$

$$\lim_{x \geq 0} f(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$D = ]0 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[ \quad ; \quad f(x) = \frac{x^x}{\ln x}$$

$$\lim_{x \leq -1} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \geq 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

**22** الدالة  $F$  حيث  $F(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}$  هي دالة

أصلية للدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  على  $]0 ; +\infty[$ .

الدالة  $F$  حيث  $F(x) = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x}$  هي دالة أصلية

للدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^2 \sqrt{x}$  على  $]0 ; +\infty[$ .

الدالة  $F$  حيث  $F(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot 5^x$  هي دالة أصلية

للدالة  $f$  حيث  $f(x) = 5^x$  على  $\mathbb{R}$ .

**23**  $D = \mathbb{R} - \{0\}$  . 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$
 . 2

$$\lim_{x \geq 0} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \leq 0} f(x) = +\infty$$

3. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم ؛

$$f'(x) = 2 \left( \ln |x| + \frac{x-1}{x} \right)$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

4.  $f(x) = 0$  يعني  $x = 1$  أو  $x = -1$ .

• مجموعة حلول المعادلة

$$\left\{ \frac{3}{2} \right\} \text{ هي } \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^x$$

• مجموعة حلول المعادلة  $x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^x$  هي  $\{1\}$

(يمكن الاعتماد على الحل البياني).

**20**  $D = \mathbb{R}_+^*$  ؛  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$f'(x) = (\ln 2) 2^x$  ؛  $D = \mathbb{R}$  ؛  $f(x) = 2^x$ .

$D = \mathbb{R}$  ؛  $f(x) = x^2 3^x$ .

$$f'(x) = x 3^x (2 + x \ln 3)$$

$f'(x) = (1 + \ln x) x^x$  ؛  $D = \mathbb{R}_+^*$  ؛  $f(x) = x^x$ .

$D = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$  ؛  $f(x) = (\ln x)^x$ .

$f'(x) = \left( \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right) (\ln x)^x$  حيث  $x > 1$ .

$D = ]-\infty ; -1[ \cup ]0 ; +\infty[$  ؛  $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$ .

$$f'(x) = \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \left( \frac{1}{x+1} \right) \right] \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

**21**  $D = ]0 ; +\infty[$  ؛  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \geq 0} f(x) = 0$$

$D = ]0 ; +\infty[$  ؛  $f(x) = x^\pi$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \geq 0} f(x) = 0$$

$D = ]-\infty ; -1[ \cup ]0 ; +\infty[$  ؛  $f(x) = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$

## حلول التمارين و المسائل

4. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f(x) = 4x - 4 + \ln(1 + e^{-3x})$$

(لاحظ أن  $1 + e^{-3x} = \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x}}$  واستعمل خواص الدالة  $\ln$ ).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-3x}) = 0 \quad 5.$$

6. المستقيم  $(\Delta')$  ذو المعادلة  $y = 4x - 4$

هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $+\infty$ .

$$E = ]\ln \sqrt{2} ; +\infty[ \quad 26$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln \sqrt{2}} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad 2.$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $E$  :

$$f'(x) = \frac{-14e^{2x}}{(e^{2x} + 5)(e^{2x} - 2)}$$

$x$	$\ln \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$0$

$$g'(x) = f'(x) - 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad 3.$$

الدالة  $g$  متناقصة تماما على  $E$  :  $\lim_{x \rightarrow \ln \sqrt{2}} g(x) = +\infty$

$x$	$\ln \sqrt{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا واحدا  $\alpha$  حيث  $\alpha > \ln \sqrt{2}$

المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقطع المستقيم ذا المعادلة  $y = x$

في نقطة واحدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $\alpha > \ln \sqrt{2}$ .

$$D_f = ]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[ \quad 24.$$

2. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D_f$  ،  $D_f \in (-x)$

و  $f(-x) = -f(x)$  المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مركز تناظر وهو المبدأ  $O$ .

3.  $x = -1$  :  $x = 1$  :  $y = 0$  هي معادلات

المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

$$f'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \quad 4.$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$0$			$0$

$$(\Delta): y = \frac{2x}{(e-1)(e+1)} - \frac{2e}{(e-1)(e+1)} + \ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right) \quad 5.$$

25. 1. معرفة على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد

$$f'(x) = 1 + \frac{3e^{3x}}{1 + e^{3x}} \quad \text{حقيقي } x :$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) > 0$

إذن  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{3x}) = 0 \quad 2.$$

3.  $f(x)$  من الشكل  $ax + b + \varphi(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x - 4$  مستقيم

مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $-\infty$ .



1  $(u_n)$  هي متتالية أعداد موجبة.

1.  $u_0 = 2$  إذن  $0 < u_0 < 3$

. نفرض أن من أجل عدد طبيعي  $n$  ؛  $0 < u_n < 3$

إذن  $6 < u_n + 6 < 9$

$0 < \sqrt{6} < \sqrt{u_n + 6} < \sqrt{9}$  بالتالي  $0 < u_{n+1} < 3$

. إذن من أجل عدد طبيعي  $n$  ؛  $0 < u_n < 3$

2.  $u_1 = \sqrt{u_0 + 6} = \sqrt{8}$  إذن  $u_1 > u_0$

. نفرض أن من أجل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_n > u_{n-1}$

$u_{n+1}^2 = u_n + 6$

$u_n^2 = u_{n-1} + 6$

$u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n - u_{n-1}$

بما أن  $u_n - u_{n-1} > 0$  فإن  $u_{n+1}^2 > u_n^2$

أي  $u_{n+1} > u_n$

. إذن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما.

2  $(u_n)$  متتالية أعداد موجبة.

1.  $u_0 = 1$  إذن  $u_0 < 2$

. نفرض أن من أجل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_n < 2$

نبرهن أن  $u_{n+1} < 2$  ،  $u_n < 2$  إذن  $2 + u_n < 4$

بالتالي  $\sqrt{2 + u_n} < 2$  ينتج أن  $u_{n+1} < 2$

2. لدينا  $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n + u_n}}$

هذا العدد موجب تماما من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n < u_{n+1}$

بالتالي  $(u_n)$  متزايدة.

3  $u_0 = 9$  و  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$

1. يمكن استعمال الاستدلال بالتراجع.

2. احسب الفرق  $u_{n+1} - u_n$

و أدرس إشارة  $-u_n^2 + u_n + 5$  .

4  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = 2u_n - 3$

لاحظ أن  $2u_n - 3 = 6 - 2^{n+1}$  و  $2u_n - 3 = 3 - 2^{n+1}$

أي  $u_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$  (باستعمال الاستدلال بالتراجع) ،

5  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{4 + u_n}$

1. لاحظ أن  $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{4 + u_n} = 1 - \frac{3}{4 + u_n}$

. نبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛

$u_n \geq 0$  . ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛

$1 - \frac{3}{4 + u_n} \leq 1$  أي  $u_{n+1} \leq 1$

2. الدالة  $x \mapsto \frac{3 + x}{4 + x}$  متزايدة على المجال  $[0, 1]$  .

(استعمال الدالة المشتقة).

3. المتتالية  $(u_n)$  متناقصة على  $\mathbb{N}$

## حلول التمارين و المسائل

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 \quad (11)$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 \quad \text{لاحظ أن } (12)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \text{ و } u_1 = 2, u_0 = 1 \quad (13)$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} \quad \text{لاحظ أن}$$

$$u_2 - u_1 = u_1 - u_0$$

$$u_3 - u_2 = u_2 - u_1$$

$$u_4 - u_3 = u_3 - u_2$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$$

و بالجمع طرفا لطرف و التبسيط نجد

$$u_{n+1} - u_1 = u_n - u_0$$

$$u_{n+1} = u_n + 1 \quad \text{أي}$$

إذن .  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0 = 1$  و أساسها  $r = 1$ .

. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = n + 1$

.  $(u_n)$  متزايدة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$$u_{n+1} = 1 - 2u_n \text{ و } u_0 = 2 \quad (14)$$

$M_n(u_n; u_{n+1})$  هي نقطة من التمثيل البياني.

... :  $M_3(7; -13)$  :  $M_1(-3; 7)$  :  $M_0(2; -3)$

$$\text{العدد } 1 - 4^1 \text{ مضاعف العدد } 3. \quad (6)$$

$$4^{n+1} - 1 = 4(4^n) - 1$$

$$= (3+1)4^n - 1$$

$$= 3 \times 4^n + (4^n - 1)$$

$$\text{العدد } 7 \times 3^0 + 4 \text{ يقبل القسمة على } 11. \quad (7)$$

نفرض أن  $7 \times 3^{5n} + 4$  يقبل القسمة على 11.

$$7 \times 3^{5n+5} + 4 = 7 \times 3^{5n} \times 3^5 + 4 \quad \text{لدينا}$$

$$= 7 \times 3^{5n} \times 243 + 4$$

$$= 7 \times 3^{5n} \times (242 + 1) + 4$$

$$= (11 \times 22 \times 7 \times 3^{5n}) + (7 \times 3^{5n} + 4)$$

ينتج أن العدد  $7 \times 3^{5n+5} + 4$  يقبل القسمة على 11.

$$(8) \text{ الخاصية محققة من أجل } n = 0.$$

نفرض أن  $4^n - 3n - 1$  يقبل القسمة على 9

$$\text{لدينا } 4(4^n - 3n - 1) = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 - 9n$$

$$\text{أي } 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 = 4(4^n - 3n - 1) + 9n$$

نستنتج أن  $4^{n+1} - 3(n+1) - 1$  يقبل القسمة على 9.

$$(9) \text{ من أجل } n = 0, n^3 - n \text{ يقبل القسمة على } 3.$$

$$\text{لاحظ أن } (n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

$$= 3k_1 + 3k_2 = 3k'$$

$$(10) \text{ من أجل } n = 0, (1+a)^0 \geq 1.$$

نفرض أن  $(1+a)^n \geq 1 + na$  حيث  $n$  عدد طبيعي

$$\text{لدينا } (1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$

$$(1+an)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

## حلول التمارين و المسائل

$$M_1\left(-\frac{1}{2}; 3\right) : M_0\left(3; -\frac{1}{2}\right)$$

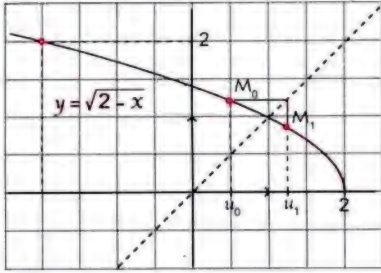
$$M_4\left(-\frac{1}{2}; 3\right) : M_2\left(3; -\frac{1}{2}\right)$$

$u_n = 3$  من أجل  $n$  زوجي

$u_n = -\frac{1}{2}$  من أجل  $n$  فردي

التخمين :  $(u_n)$  ليس متقاربة و ليس لها نهاية.

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \text{ و } u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{16}$$



$$M_0\left(\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$M_1\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; u_3\right)$$

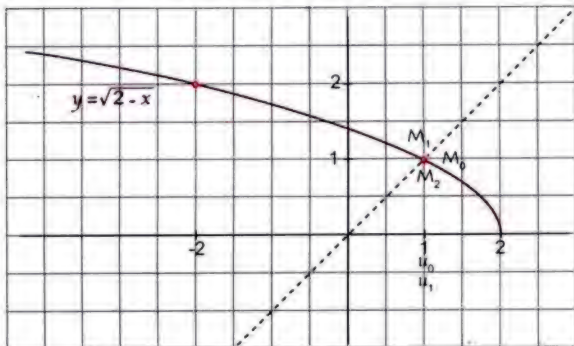
$$M_2(u_3; u_4)$$

$(u_n)$  متقاربة و نهايتها  $l$  تحقق  $f(l) = l$

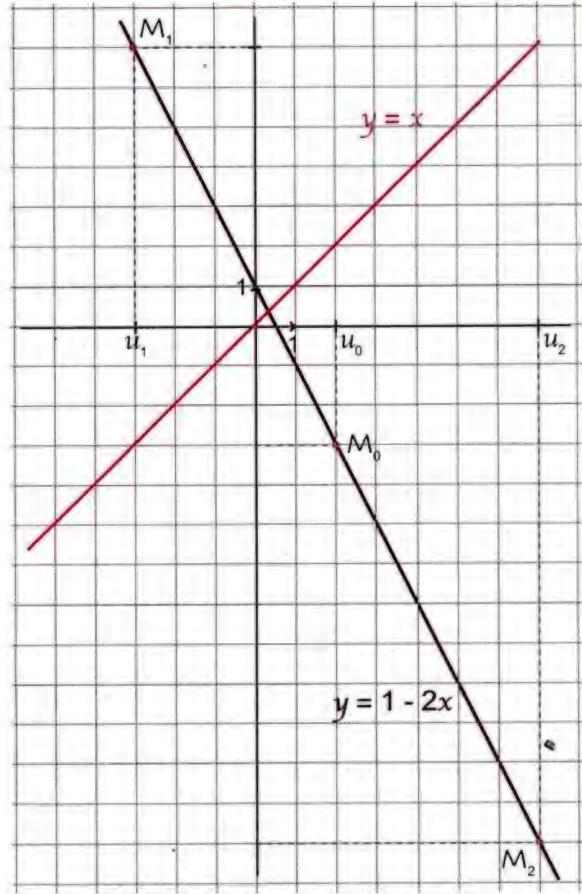
أي  $\sqrt{2-l} = l$  و نجد  $l = 1$  إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \text{ و } u_0 = 1 \quad \text{17}$$

$$M_2(1; 1) : \dots M_2(1; 1) : M_1(1; 1) : M_0(1; 1)$$



المتتالية ثابتة  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

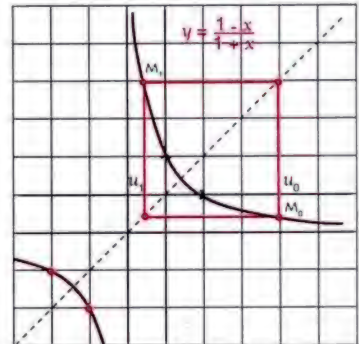


التخمين : المتتالية  $(u_n)$  ليست متقاربة.

حدود المتتالية  $(u_n)$  متناوبة في الإشارة و النقط  $M_n$  تبتعد أكثر فأكثر في الجهتين.

المتتالية  $(u_n)$  ليس لها نهاية.

$$u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{1 + u_n} \text{ و } u_0 = 3 \quad \text{15}$$





## حلول التمارين و المسائل

$$u_0 = \frac{1}{7} \quad (20)$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{1}{2} \quad \text{من أجل كل } n \in \mathbb{N}$$

نبرهن بالتراجع على  $\mathbb{N}$  أن  $u_n \leq \frac{3}{4}$ .

$$u_n = \frac{n+1}{n} \quad (21) \quad (u_n) \text{ متناقصة و متقاربة}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad \text{و}$$

$$v_n = -n \quad (v_n) \text{ متناقصة و متباعدة}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \quad \text{و}$$

$$u_n = 2^{n-1} \quad (22) \quad (u_n) \text{ متتالية هندسية حدها الأول}$$

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{و أساسها } q = 2 \quad u_n \text{ متزايدة و غير}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{متقاربة و}$$

$$v_n = \frac{1}{3^{n-1}} \quad (v_n) \text{ متتالية هندسية حدها الأول}$$

$$v_0 = 3 \quad \text{و أساسها } q = \frac{1}{3} \quad (v_n) \text{ المتتالية متناقصة}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \quad \text{و متقاربة و}$$

$$u_n = \frac{-1}{2^{n-1}} \quad (23)$$

$$(u_n) \text{ متزايدة و متقاربة و } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$v_n = (-2)^{n-1} \quad (v_n) \text{ المتتالية غير رتيبة و متباعدة}$$

$(v_n)$  ليس لها نهاية.

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (24)$$

$$u_n = f(n) \quad \text{من الشكل } u_n = f(n) \quad \text{من دراسة تغيرات } f$$

ينتج أن  $(u_n)$  متناقصة

(يمكن استعمال الاستدلال بالتراجع).

$$1. \quad \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \quad (18)$$

$$\text{من أجل } n \geq 1 : \frac{1}{n} \leq 1 \quad \text{و} \quad \frac{2}{n} \leq 2$$

و بالتالي  $1 \leq u_n \leq 3$  أي  $(u_n)$  محدودة.

$$2. \quad u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$$

$$= n + \frac{1}{n}$$

$$\text{من أجل كل } n \in \mathbb{N}^* \quad 2 \leq u_n$$

$(u_n)$  محدودة من الأسفل.

$$3. \quad u_n = \frac{n+3}{2n-1}$$

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير منعدم : } u_n \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{و } u_0 = -3 \quad \text{إذن } (u_n) \text{ محدود من الأسفل بالعدد } -3.$$

$$1. \quad u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \quad (19)$$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم،

$$0 < \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} < 1$$

إذن  $(u_n)$  محدودة.

$$2. \quad u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$$

$$\text{من أجل كل } n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \sqrt{n^2 + 1} - n \quad \text{و } u_n = f(n)$$

إذن  $(u_n)$  محدودة من الأسفل بالعدد 0.

$$3. \quad u_n = 4^n - 3^n$$

$$\text{من أجل كل } n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq 4^n - 3^n$$

$(u_n)$  محدودة من الأسفل بالعدد 0.

## حلول التمارين و المسائل

**29**  $u_n = \frac{n^4}{n!}$  حيث  $n$  عدد طبيعي.

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_n \geq 0$ .

إذن  $(u_n)$  محدودة من الأسفل و متناقصة بدءاً من  $u_3$ .

عند استعمال الاستدلال بالتراجع لاحظ أن  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

إذن  $(u_n)$  متقاربة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**30**  $u_0 = 2$  و  $2u_n = u_{n+1} + 1$  و  $v_n = u_n - 1$

1. نجد  $v_{n+1} = 2v_n$  . إذن  $(v_n)$  متتالية هندسية

حيث  $v_0 = 1$  و  $q = 2$ .

2. لدينا  $v_n = 2^n$ .

إذن  $u_n = 2^n - 1$

بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**31**  $u_0 = 3$  و  $u_n = \frac{1}{3} u_{n-1} - 4$

1.  $(u_n)$  متناقصة. (استعمال الاستدلال بالتراجع)

2.  $v_n = u_n + 6$  نبرهن أن  $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$ .

حيث  $(v_n)$  متتالية هندسية.  $v_0 = 9$  و  $q = \frac{1}{3}$

و  $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3.  $(v_n)$  متتالية هندسية مع  $0 < q < 1$  و  $v_0 = 9$

إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -6$ .

**32**  $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$  و  $v_n = \frac{2n+2}{n+2}$

المتتالية  $(u_n)$  متزايدة لأن الدالة المرفقة بها

متزايدة على  $[0 ; +\infty[$ . المتتالية  $(v_n)$  متناقصة

لأن الدالة المرفقة بها متناقصة على  $[0 ; +\infty[$ .

2.  $(u_n)$  متناقصة و محدودة من الأسفل، فهي

متقاربة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**25** 1.  $q = \frac{1}{3}$  و  $u_0 = -2$  .  $0 < q < 1$

و  $u_0 < 0$ . إذن المتتالية الهندسية متناقصة.

2.  $u_0 = \frac{1}{3}$  و  $q = -\frac{\sqrt{1}}{3}$ .

$q < 0$  إذن المتتالية  $(u_n)$  ليست رتيبة.

**26** 1.  $v_0 = 1$  و  $q = 2$

$v_0 > 0$  و  $q > 1$  إذن المتتالية الهندسية  $(v_n)$  متزايدة.

2.  $v_0 = -1$  و  $q = -3$

$q < 0$  المتتالية الهندسية  $(v_n)$  ليست رتيبة.

**27** 1.  $u_0 = 1$  و من أجل عدد طبيعي  $n$  ؛

$u_{n+1} = \sqrt{n+7}$  . لاحظ أن  $\sqrt{n+6} < \sqrt{n+7}$

إذن  $(u_n)$  متزايدة.

2.  $v_0 = 8$  و  $v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 1}$

باستعمال الاستدلال بالتراجع يمكن إثبات

أن  $(v_n)$  متناقصة.

**28**  $u_n = 1 + n + \sin n$

1.  $n \leq u_n \leq 2 + n$

2. المتتاليتان الحسابيتان  $(v_n)$  و  $(w_n)$  معرفتان

كما يلي :  $v_n = 2 + n$  و  $w_n = n$

لدينا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

## حلول التمارين والمسائل

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad (35)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

إذن  $u_{n+1} - u_n > 0$  متزايدة.

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n - n - 1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n - n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}$$

إذن  $v_{n+1} - v_n < 0$  متناقصة.

لدينا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$  و  $v_n - u_n = \frac{1}{n}$

إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان متجاورتان.

$$u_2 = 13 : u_1 = 6 : u_0 = 1 \quad (36)$$

$$u_4 = 41 : u_3 = 24$$

3.2. نستعمل الاستدلال بالتراجع.

$$u_0 = 1 \quad .4$$

$$u_1 = u_0 + 1^2 - 1 + 5$$

$$u_2 = u_1 + 2^2 - 2 + 5$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_{n-1} + n^2 - n + 5$$

$$(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) + u_n = 1 + (u_0 + \dots + u_{n-1})$$

$$+ (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$- (1 + 2 + \dots + n) + 5n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 2 : u_n - v_n = \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right)$$

إذن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$$

$$v_n = \frac{3n^2 + 4}{n^2 + 1} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{3n + 4}{n + 1} \quad (33)$$

كل من  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متناقصة.

إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متجاورتين.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \quad (34)$$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $\frac{1}{(n+1)!} > 0$

إذن  $(u_n)$  متزايدة.  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{n+1}{n \cdot (n+1)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{(n+1)(n+1)!}$$

وبعد التبسيط نجد  $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{(n+1)! \cdot n \cdot (n+1)}$

إذن  $v_{n+1} - v_n < 0$  وبالتالي  $(v_n)$  متناقصة.

لدينا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$  :  $v_n - u_n = -\frac{1}{n \cdot n!}$

$(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان متجاورتان.



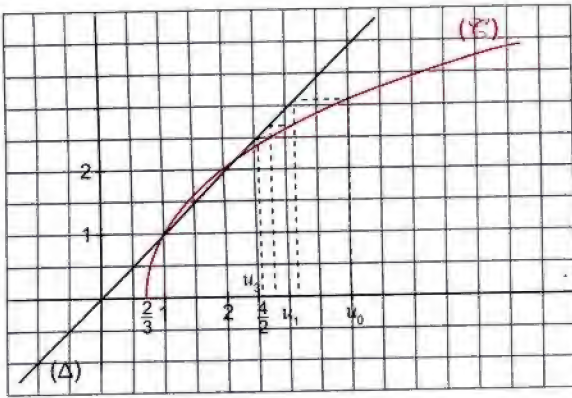
## حلول التمارين والمسائل

5.  $(u_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن  $(u_n)$  متقاربة.  
لإيجاد نهاية  $(u_n)$  عند  $+\infty$ ، نحل المعادلة  $\ell = f(\ell)$   
ونجد  $\ell = \sqrt{3}$ .

38. 1.  $u_2 = \sqrt{3\sqrt{10} - 2}$  ;  $u_1 = \sqrt{10}$  ;  $u_0 = 4$

$$u_3 = \sqrt{3\sqrt{10} - 2} - 2$$

2. أ - ب.



ج) المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

3. ثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_n \geq 2 \text{ لدينا } u_0 \geq 2$$

بفرض  $u_n \geq 2$  ينتج أن  $3u_n - 2 \geq 4$  أي  $\sqrt{3u_n - 2} \geq 2$

4. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{3u_n - 2} + u_n} \leq 0$$

وبالتالي  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  إذن  $(u_n)$  متناقصة.

5.  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل

إذن  $(u_n)$  متقاربة.

$$\ell = 2 \quad 6.$$

بعد التبسيط نجد :

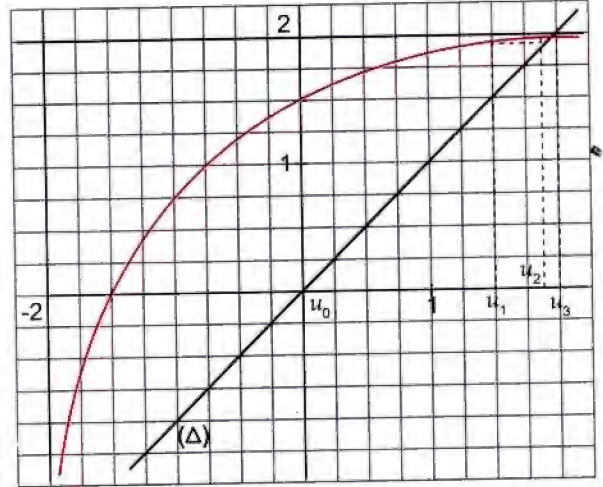
$$u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + 5n$$

$$u_n = 1 + 5n + \frac{(n-1)(n)(n+1)}{3} \quad \text{أي}$$

5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  إذن  $(u_n)$  ليست متقاربة.

37. 1.  $u_3 = \frac{45}{26}$  ;  $u_2 = \frac{12}{7}$  ;  $u_1 = \frac{3}{2}$  ;  $u_0 = 0$

2. أ - ب.



ج) المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2} \quad 3.$$

نبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$3 - u_n^2 > 0 \quad \text{و أن من أجل كل عدد طبيعي } n$$

$$u_n + 2 \geq 0$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1 + u_n}{2 + u_n} \quad 4.$$

نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 2$

## حلول التمارين والمسائل

$$8 = 1 \quad ; \quad \beta = -1 \quad ; \quad \alpha = 1 \quad \text{5}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \left[ -\frac{1}{x^2} - \ln|x| - \ln|x+1| \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4}$$

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2} \sin 2x \quad ; \quad I_1 + I_2 = x \cdot 1 \quad \text{6}$$

$$I_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \quad ; \quad I_2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \quad .2$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \quad ; \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \quad .3$$

(استعمل العلاقتين السابقتين).

$$\int_{-2}^4 |x^2 - 4| dx = \frac{64}{3} \quad ; \quad \int_{-1}^3 |x - 2| dx = 5 \quad \text{7}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left| 2 - \frac{2}{x} \right| dx = 1 \quad ; \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt = 2$$

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2t - 1) dt = \frac{1}{4} \cdot 1 \quad \text{8}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 (2t + 1) dt = \frac{25}{4}$$

$$\int_{-1}^2 |2t + 1| dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2t - 1) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^2 (2t + 1) dt \quad .2$$

$$= \frac{13}{2}$$

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt \leq 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{9}$$

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt \geq 0 \quad ; \quad x \geq 1$$

2. من أجل كل عدد حقيقي  $t$  موجب تماما :

$$\left( \frac{1}{2} t^2 - t \ln t \right)' = t - 1 - \ln t$$

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt = \left[ \frac{1}{2} t^2 - t \ln t \right]_1^x$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} - x \ln x$$

### الحساب التكاملي 07

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx = \ln 2 \quad ; \quad \int_{-1}^2 (x^2 + x) dx = \frac{9}{2} \quad \text{1}$$

$$\int_{-3}^{-1} \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx = -\frac{2}{3} \quad ; \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-3}^{-1} (t + 3)^3 dt = 4 \quad ; \quad \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos \left( \frac{1}{2} x + \frac{\pi}{2} \right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{1}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{\cos x} dx = -1 + e$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln 2 \quad ; \quad \int_0^1 \frac{2x}{4 - x^2} dx = \ln \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 \quad \text{2}$$

$$\int_e^1 f(x) dx = \left[ \frac{1}{2} \ln|x - 2| - \frac{1}{2} \ln|x + 2| \right]_0^1 \quad .2$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 3$$

3. وحدة المقامات وبسط العبارة.

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx = \left[ \frac{1}{4} (\ln|x - 3| - \ln|x + 1|) \right]_0^2 \quad .2$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 3$$

$$b = -1 \quad ; \quad a = 1 \quad .1 \quad \text{4}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = \left[ \ln|x| - \ln|x+1| \right]_1^2 \quad .2$$

$$= \ln \frac{4}{3}$$

## حلول التمارين والمسائل

$$A = \frac{25}{4} \text{ cm}^2 \quad .2 \quad \textcircled{13}$$

$$A = \int_1^e [g(x) - f(x)] dx \quad .2 \quad \textcircled{14}$$

$$= e^{e-1} - 2$$

$$A(a) = -(a+1)e^{-a} + 1 \quad .2 \quad \textcircled{15}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [-(a+1)e^{-a} + 1] = 1 \quad .3$$

$$\text{إذن } z = MH = \frac{R(h-z)}{h} \quad \textcircled{16}$$

$$v = \int_0^h S(z) dz = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} (h-z)^2 dz = \frac{\pi h R^2}{3}$$

$$\int_2^3 \ln(x-1) dx = 2 \ln 2 - 1 \quad .2 \quad \textcircled{17}$$

$$\int_2^3 \ln(x+1) dx = 8 \ln 2 - 3 \ln 3 - 1 \quad .3$$

$$A = \left( \ln \frac{64}{27} \right) \text{ cm}^2 \quad .4$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2} (2 - \ln x) \quad \textcircled{18}$$

x	0	$e^2$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\frac{2}{e}$	0

$$A = [2\sqrt{x} \ln x]_1^{e^2} - 2 [2\sqrt{x}]_1^{e^2} = 4 \quad .2$$

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2} : [1; m] \text{ على المجال } \quad \textcircled{19}$$

$$A(m) = \int_1^m \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \ln m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(m) = 1 \quad .2$$

$$u = -1 \quad .2 \quad ; \quad u = 3 - 2e \quad .1 \quad \textcircled{10}$$

$$u = 0 \quad .4 \quad ; \quad u = \frac{1}{8} \left( \frac{e^2 - 7}{e - 1} \right) \quad .3$$

$$u = -6 \quad .6 \quad ; \quad u = \frac{14}{5} \quad .5$$

$$u = \frac{1}{2} \quad .8 \quad ; \quad u = \frac{1}{2} \quad .7$$

$$\int_0^1 (3-t)e^t dt = 3e - 4 ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \textcircled{11}$$

$$\int_0^{\pi} (3x+2) \sin x dx = 3\pi + 4$$

$$\int_0^{\pi} (-x+3) \cos x dx = 2$$

$$\int_1^x t \ln t dt = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4}$$

$$\int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{2} ; \int_0^2 x e^x dx = e^2 + 1$$

$$\int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1) \sin(2x^2-x) dx = -\cos\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = e - 2 \quad \textcircled{12}$$

$$\int_0^1 (3t^2 - t + 1) e^t dt = 4e - 8$$

$$\int_0^1 t^2 e^{3t} dt = \frac{5e^3 - 2}{27}$$

$$\int_0^{\pi} e^t \sin t dt = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1) ; \int_0^{\pi} e^t \cos t dt = -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx = \frac{3}{13}(e^{-\pi} - e^{\pi})$$

$$\int_0^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx = \frac{8}{9} e^3 + \frac{4}{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t dt = \frac{1}{8} \pi^2 - \frac{1}{2}$$



## حلول التمارين والمسائل

3. على المجال  $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$  ،  $f(x) \leq 0$  .

إذن  $A = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-x \ln x) dx = \int_1^{\frac{1}{e}} x \ln x dx$   
 أي  $A = -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} \approx 0,148$

22. 1.  $f(x) = -x \ln x$  على المجال  $]0; 1[$

$$f(1) = 0$$

$$f(x) = x \ln x \text{ على } ]1; +\infty[$$

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

إذن  $f$  مستمرة عند 0 عن اليمين وعند 1 وبالتالي  $f$  مستمرة على  $[0; +\infty[$ .

$f$  ليست قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين.

$f$  ليست قابلة للاشتقاق عند 1 وبالتالي  $f$  لا تقبل الاشتقاق على  $[0; +\infty[$ .

**ملاحظة:**  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; 1[$  و  $]1; +\infty[$

$$2. f'(x) = -1 - \ln x \text{ على المجال } ]0; 1[$$

$$f'(x) = 1 + \ln x \text{ على المجال } ]1; +\infty[$$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0	$+\infty$

3. على المجال  $]0; 1[$  :  $f(x) \geq 0$

إذن  $A(t) = \int_t^1 f(x) dx$   
 $= \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{4}$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} A(t) = \frac{1}{4}$$

$$20. 1. f'(x) = 4(1-x)e^{-2x}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$e^{-2}$	0

$$3. A(\lambda) = \frac{1}{2e} - \lambda e^{-2\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \frac{1}{2e}$$

4. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $H'(x) = h(x)$

إذن  $H$  دالة أصلية لـ  $h$  على  $\mathbb{R}$ .

$$5. v = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{8} (5e^2 - e^{-2})$$

$$v = \frac{\pi}{8} (5e^2 - e^{-2}) \approx 18,4 \text{ cm}^3 \text{ إذن}$$

21. 1.  $f$  معرفة عند 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ و}$$

إذن  $f$  مستمرة عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

إذن  $f$  ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

$$2. f'(x) = 1 + \ln x \text{ على } ]0; +\infty[$$

$$f'(x) = 1 + \ln(-x) \text{ على } ]-\infty; 0[$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$



كتاب الرياضيات من سلسلة مدرستي موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي، شعبة العلوم التجريبية. فهو يتماشى مع المنهاج الرسمي المقرر تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و يتكفل بالكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها.

يتضمن كل باب من هذا الكتاب العناصر التالية :

- المعارف الأساسية الواردة في المنهاج.
  - الطرائق التي ينبغي التحكم فيها.
  - تمارين و مسائل مرفقة بحلول مفصلة.
  - تمارين و مسائل مقترحة للحل، توجد حلولها في الصفحات الأخيرة للكتاب.
- يشمل هذا الجزء أكثر من 220 تمرين و مسألة محلولة.

كما نلفت الانتباه إلى وجود أكثر من 460 تمرين و مسألة محلولة في الجزأين من الكتاب، تساعد المترشح لامتحان البكالوريا على التحضير الجيد.





أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation